

# Índice general

<b>1. Números Complejos</b>	<b>6</b>
1.1. La Inevitabilidad de los Números Complejos . . . . .	6
1.2. Recapitulación de las propiedades elementales . . . . .	13
1.2.1. Campo “no ordenado” . . . . .	13
1.2.2. Raíz cuadrada . . . . .	15
1.2.3. Representación geométrica . . . . .	16
1.2.4. Conjugación . . . . .	16
1.2.5. Interpretación geométrica de las operaciones . . . . .	19
1.2.6. Representación de $\mathbb{C}$ con matrices . . . . .	22
1.2.7. Fórmula de De Moivre . . . . .	23
1.2.8. Raíces . . . . .	24
1.3. Importancia y Singularidad de los Números Complejos . . . . .	25
1.3.1. El caso de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	25
1.3.2. Los cuaternios . . . . .	27
1.3.3. Factorización de polinomios reales . . . . .	29
1.4. Teorema Fundamental del Algebra . . . . .	30
1.4.1. Prefiguración de algunas ideas sobre las transformaciones complejas	30
1.4.2. Demostración elemental del Teorema Fundamental del Algebra . .	32
<b>2. Transformaciones del Plano Complejo</b>	<b>35</b>
2.1. El Grupo Afín . . . . .	35
2.1.1. Traslación. Rotación. Homotecia. . . . .	35
2.1.2. El Grupo Afín . . . . .	38
2.2. Transformaciones de Möbius . . . . .	43
2.2.1. Inversión . . . . .	43
2.2.2. La esfera de Riemann . . . . .	45
2.2.3. Transformaciones de Möbius . . . . .	46
2.2.4. Invariancia de círculos, ángulos y razón cruzada. . . . .	49
2.2.5. Introducción a las funciones Racionales . . . . .	53

2.3.	Análisis geométrico . . . . .	53
2.3.1.	$z^2$ como transformación del plano. Duplicación y preservación de ángulos . . . . .	53
2.3.2.	Raíz cuadrada. Otras potencias y raíces. . . . .	68
2.3.3.	Polinomios y funciones Racionales . . . . .	70
2.3.4.	Función de Zhukovsky . . . . .	79
2.4.	La exponencial y las funciones trigonométricas . . . . .	83
2.4.1.	Función Exponencial . . . . .	83
2.4.2.	Transformación del Plano bajo la función exponencial . . . . .	86
2.4.3.	Función Logaritmo . . . . .	88
2.4.4.	Funciones trigonométricas e hiperbólicas . . . . .	89
2.4.5.	Función coseno y su inversa . . . . .	91
<b>3.</b>	<b>Derivación de Funciones Complejas</b>	<b>93</b>
3.1.	Función derivable . . . . .	93
3.1.1.	Ejemplos de funciones derivables y no derivables. . . . .	93
3.1.2.	Una función es derivable si, y sólo si, lo es como función real y su derivada es $\mathbb{C}$ -lineal. . . . .	95
3.1.3.	Derivación respecto a $z$ y a $z$ conjugada . . . . .	97
3.1.4.	Determinante jacobiano . . . . .	97
3.1.5.	Interpretación en Mecánica de Fluidos . . . . .	98
3.2.	Teorema complejo de la función inversa . . . . .	102
3.2.1.	Teorema complejo como corolario del real . . . . .	102
3.2.2.	Función armónica . . . . .	103
3.2.3.	Derivabilidad de las funciones elementales . . . . .	103
<b>4.</b>	<b>Integración de Funciones Complejas</b>	<b>105</b>
4.1.	Integral Compleja . . . . .	105
4.1.1.	La integración compleja como integral de línea . . . . .	105
4.1.2.	Propiedades elementales de las integrales de línea complejas. . . . .	107
4.2.	Teorema de la Primitiva . . . . .	109
4.2.1.	Ejemplos de funciones “integrables” y “no integrables” . . . . .	109
4.2.2.	“Integrabilidad” de las potencias positivas y no negativas de $z$ ...salvo una. Comparación con las integrales de línea reales: campos conservativos y diferenciales exactas. . . . .	111
4.3.	Teorema de Cauchy para el rectángulo . . . . .	115
4.4.	Integración de funciones racionales . . . . .	117
4.4.1.	El Teorema del Residuo (primera versión) . . . . .	117
4.4.2.	Cálculo de Integrales reales . . . . .	118

A. Teorema (Bolzano-Weierstrass):	121
B. Teorema Fundamental del Algebra	122
C. Geometría real con notación compleja	124
D. Fracciones Parciales	127
E. Geometría hiperbólica	130

# Introducción

Estas notas son una primera versión escrita del curso de Variable Compleja I que imparte el Dr. Santiago López de Medrano en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Se trata de un enfoque que pone especial énfasis en el análisis geométrico de los distintos conceptos y resultados de las funciones de variable compleja, con la intención de que el alumno pueda interpretarlos intuitivamente y compararlos recurrentemente con el caso de funciones de variable real. El objetivo de este trabajo es proporcionar a los estudiantes de las carreras de matemáticas, física, actuaría y ciencias de la computación un material de apoyo a su participación en el propio curso, aunque creemos que será de utilidad en general para todos aquellos que quieran acercarse al estudio de las funciones de variable compleja. Se presupone que los alumnos han tomado las cuatro asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral que forman parte del tronco común de dichas carreras.

No obstante que esta primera versión escrita trata de reunir las ideas surgidas durante varios semestres, hay dos cosas que son indudables: una, que difícilmente puede recogerse en un papel el mundo de ideas que afloran en los cursos de Santiago. La otra, que naturalmente que este material habrá de verse enriquecido al calor de las discusiones de los nuevos grupos en que sea expuesto. En todo caso, nos daremos por bien servidos si logramos contribuir con este trabajo a que esto suceda.

En el curso de Variable Compleja II, con la introducción de nuevos conceptos y resultados podrán verse desde otra óptica muchas de las ideas que aquí se plantean, abordándose entonces nuevas versiones de varios resultados que aquí aparecen. Diversas aplicaciones en Física y Matemáticas dan cuenta de la importancia de toda esta problemática (Mecánica de Fluidos, Fractales, etc).

La estructura del trabajo es a grandes rasgos la siguiente. Dentro del primer capítulo abordamos el origen histórico de los números complejos, de cómo fue la cúbica la responsable de ello con su caso irreducible. Se define el campo de los números complejos y se discute por qué no es un campo ordenado. Una recapitulación de las propiedades elementales, la interpretación geométrica de las operaciones y la representación de  $\mathbb{C}$  con matrices. En la tercera sección de este capítulo se analiza la imposibilidad de extender el campo de los números complejos a espacios de dimensión mayor que dos. En general, se observa que se trata de un campo realmente muy interesante e importante, que muchos problemas en  $\mathbb{R}$  adquieren un mejor panorama vistos desde  $\mathbb{C}$ . Que tal y como lo expresó el matemático francés Jacques-Salomón Hadamard "*...el camino más corto entre dos resultados sobre los números reales pasa frecuentemente por los complejos*".

Al final de este capítulo se demuestra de manera elemental el Teorema Fundamental del Algebra. Una demostración más rigurosa puede consultarse en el Apéndice B.

En el Capítulo II se aborda ya *en forma* el estudio de las funciones de variable compleja. Como indicábamos más arriba, éste estará *atravesado* de principio a fin por el análisis geométrico: imágenes directas e inversas de puntos, rectas, círculos, mallas de rectas horizontales y verticales, visión global sobre cómo es transformado todo el plano por la función, de si hay o no conservación de ángulos, simetrías, etc.

La primera parte está dedicada al estudio de traslaciones, rotaciones, homotecias, el grupo afín, las transformaciones de Möbius, la razón cruzada. Luego se examina detenidamente la función  $z^2$ , para pasar más adelante a analizar los polinomios, su comportamiento cuando  $z$  tiende a infinito, etc. y las funciones racionales. Se trabaja con la función de Zhukovsky, lo cual ayudará mas adelante a entender nuevas funciones que pueden ser vistas como composiciones que la incluyen. Finalmente, concluimos el capítulo con el estudio de las funciones exponencial y logaritmo.

El Capítulo III está dedicado a entender el concepto de derivada, qué implicaciones tiene que una función compleja sea derivable. Se da una breve interpretación de ella desde la óptica de la Mecánica de Fluidos y en la segunda parte nos detenemos a analizar el Teorema Complejo de la Función Inversa.

Para concluir esta primera parte del curso de Variable, se estudia en el Capítulo IV la integral compleja y sus principales propiedades. Se discute una primera versión del Teorma de Cauchy y también del Teorema del Residuo, para el cual se anexa, en el Apéndice D, una bonita demostración de que toda función racional puede descomponerse como la suma de fracciones parciales. Y ya para finalizar, estudiamos algunas integrales reales de difícil solución, abordándolas con la herramienta desarrollada.

Marzo de 2003

# Capítulo 1

## Números Complejos

### 1.1. La Inevitabilidad de los Números Complejos

Hacia mediados del siglo XVI, apareció una publicación de Jerónimo Cardano (1501-1576), *Ars Magna*, en la que se presenta una solución de la ecuación cúbica.

En realidad hay una controversia sobre quién descubrió esta solución. Cardano presionó a Niccolo Tartaglia (Niccolo Fontana de Brescia (1500-1557)) para que le revelara el método de solución de la cúbica que éste había encontrado. Tartaglia se lo dió pidiéndole que guardara el secreto. Según Carl B. Boyer en su libro *Historia de la Matemática* (capítulo XV), fue Scipione del Ferro (1465-1526) profesor de matemáticas en Bolonia, una de las más antiguas de las universidades medievales y una escuela con una gran tradición matemática, quien descubriera la solución pero que sólo revelaría antes de su muerte a uno de sus alumnos Antonio María Fior.

Alguna noticia sobre la existencia de una solución algebraica de la ecuación cúbica debió filtrarse, al parecer, y Tartaglia nos dice que al tener conocimiento de la posibilidad de resolverla, se le ocurrió dedicarse intensamente a descubrir el método por sí mismo. Ya fuera independientemente o sobre la base de alguna sugerencia, lo cierto es que Tartaglia consiguió aprender, hacia el año 1541, a resolver ecuaciones cúbicas. Cuando se extendió esta noticia, se organizó un desafío matemático entre Fior y Tartaglia".<sup>1</sup>

La ecuación de segundo grado  $x^2 + px + q = 0$  fue resuelta desde la antigüedad, cuya solución es conocida por la fórmula  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ .

Cuando el discriminante  $D = \frac{p^2}{4} - q$  resultaba negativo, se decía que no había solución, aparentemente no había razón para considerar a los números complejos. Lo interesante está en que fue la ecuación cúbica la que llevó a los matemáticos a comprender dichos números y que a raíz de la publicación de *Ars Magna* se dio un gran avance en la investigación algebraica en distintas direcciones.

---

<sup>1</sup>Carl B. Boyer [1968].

El método de del Ferro-Tartaglia-Cardano se expresa en términos modernos como sigue:

Sea

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se reduce la ecuación general de la cúbica con un cambio de variable  $x := x - \frac{b}{3}$ , para obtener la forma  $x^3 + px + q = 0$  donde  $p = c - \frac{b^2}{3}$  y  $q = 2\frac{b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d$

Sea  $p \neq 0$

vamos a considerar dos incógnitas,  $s$  y  $t$ , tales que  $x = s + t$ , sustituimos en la cúbica y desarrollamos:

$$(s + t)^3 + p(s + t) + q = 0,$$

$$s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 + ps + pt + q = 0,$$

Observamos que si  $s^3 + t^3 = -q$  y  $3st = -p$  (o bien  $st = -\frac{p}{3}$ ) entonces tendríamos que  $x$  sería solución.

Resolvemos el siguiente sistema:

$$s^3 + t^3 = -q \dots \dots \dots (1)$$

$$st = -\frac{p}{3} \dots \dots \dots (2)$$

despejamos  $t$  en (2) y sustituimos en (1):

$$s^3 + \left(-\frac{p}{3s}\right)^3 = -q,$$

$$3^3(s^3)^2 + 3^3s^3q - p^3 = 0,$$

y si hacemos  $s^3 = \alpha$  obtenemos  $3^3\alpha^2 + 3^3\alpha q - p^3 = 0$

entonces las soluciones para  $\alpha^2 + q\alpha - \frac{p^3}{27} = 0$  y los posibles valores para  $s^3$  son :

$$\alpha = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}$$

También se puede obtener una cuadrática en términos de  $t^3$  y tendremos dos valores posibles:

$$\beta = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}$$

Por las condiciones del sistema tenemos que :

$$s = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ y } t = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Por tanto

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Esta es la solución de del Ferro-Tartaglia-Cardano.

Cuando en la fórmula el discriminante  $\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}$  resultaba negativo, ya no se podía admitir que no hubiera solución, porque una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real.

En el caso de tener tres raíces reales distintas la fórmula conduce inevitablemente a raíces cuadradas de números negativos. Tartaglia llamó a este caso "irreducible", porque no había método algebraico que lo resolviera. Cardano había resuelto ecuaciones de segundo grado con raíces complejas, pero las despreció por "inútiles".<sup>2</sup>

"El primer trabajo que tomó seriamente a los números complejos y logró la necesaria reconciliación fue Rafael Bombelli (1526-1572). Bombelli resolvió el álgebra formal de los números complejos, con el particular objeto de reducir expresiones  $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$  a la forma  $c + d\sqrt{-1}$ . Su método le permitió mostrar la realidad de algunas expresiones que resultan de la fórmula de Cardano. Por ejemplo:

La solución de

$$x^3 = 15x + 4$$

es

$$x = (2 + 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (2 - 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

de acuerdo con la fórmula. Por otro lado, por inspección directa podemos observar que  $x = 4$  es una solución. Bombelli tuvo la corazonada que las dos partes de  $x$  en la fórmula de Cardano eran de la forma  $2 + n\sqrt{-1}$ ,  $2 - n\sqrt{-1}$ , y encontró elevando al cubo estas expresiones (usando  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ ) que verdaderamente

$$(2 + 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$(2 - 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 2 - \sqrt{-1}$$

por esto la fórmula de Cardano también da  $x = 4$  ".<sup>3</sup>

Bombelli, aunque no comprendiera del todo los números complejos, estaba poniendo de manifiesto que para resolver problemas reales se necesitaba de una aritmética compleja.

Veamos cómo en el caso "irreducible" esto es más claro.

Si un polinomio de tercer grado tiene tres raíces reales distintas entonces el discriminante  $\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}$  es negativo.

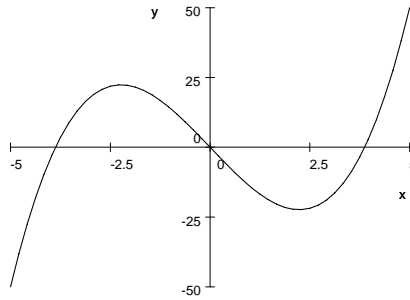
Si tenemos un polinomio con sus tres raíces reales distintas, la gráfica sería esencialmente así:

---

<sup>2</sup>Morris Kline [1972].

<sup>3</sup>John Stillwell [1989].





Analicemos este caso con  $p < 0$  y  $q \geq 0$  :

$$f(x) = x^3 + px + q,$$

$$f'(x) = 3x^2 + p,$$

$$f''(x) = 6x,$$

$$f'(x) = 0, \text{ en } x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \text{ y } x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

La función alcanza un máximo local en  $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$  y un mínimo local en  $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ . Cuando  $x$  se va a  $\infty$ , los valores de la función se van a  $\infty$  y cuando  $x$  se va a  $-\infty$  entonces  $f(x) \rightarrow -\infty$ , y si cumple que tiene sus tres raíces reales distintas entonces los valores de la función en los puntos críticos,  $(f(-\sqrt{-\frac{p}{3}})$  y  $f(\sqrt{-\frac{p}{3}})$ ), tienen signo distinto:

$$f(-\sqrt{-\frac{p}{3}}) = -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0,$$

$$f(\sqrt{-\frac{p}{3}}) = \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0 \quad \text{si } |q| < |\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}|$$

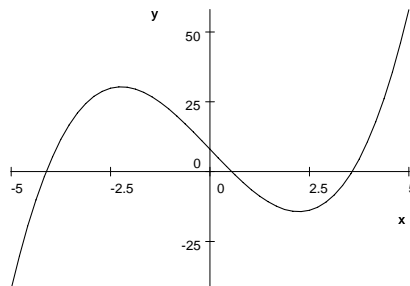
por tanto  $f(-\sqrt{-\frac{p}{3}})f(\sqrt{-\frac{p}{3}})$  es negativo, pero ¿Quién es este producto?

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{-\frac{p}{3}})f(\sqrt{-\frac{p}{3}}) &= (q - \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}})(q + \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}) = q^2 + 2^2\frac{p^3}{3^3} = \\ &= 2^2 \left( \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right) < 0 \end{aligned}$$

Por tanto

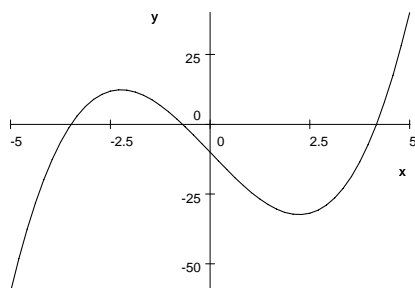
$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

Ejemplo con  $q > 0$  :



Ahora si  $q < 0$ , todo sigue igual si  $|q| < \left| \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \right|$  y tenemos nuevamente que el discriminante es negativo:

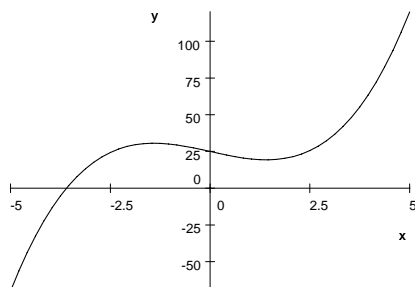
Ejemplo:



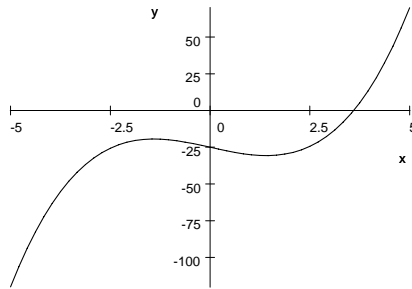
Si tuviéramos que  $|q| > \left| \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \right|$ , donde  $q > 0$  o bien  $q < 0$ , entonces la gráfica de la cúbica está por arriba del eje  $X$  o por debajo según el valor de  $q$  y en ambos casos existe una raíz real. Observemos cómo aquí el discriminante es positivo.

Por ejemplo:

$$x^3 - 6x + 25$$



$$x^3 - 6x - 25$$



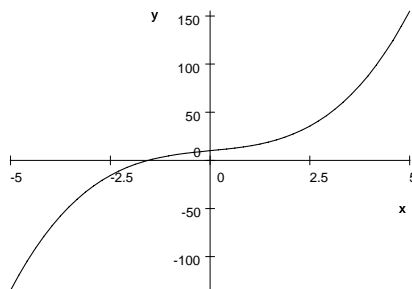
Si alguno de los valores de la función en los puntos críticos ( $f(-\sqrt{-\frac{p}{3}})$  o  $f(\sqrt{-\frac{p}{3}})$ ) es cero entonces tendremos una raíz múltiple.

Ahora si  $p > 0$  :

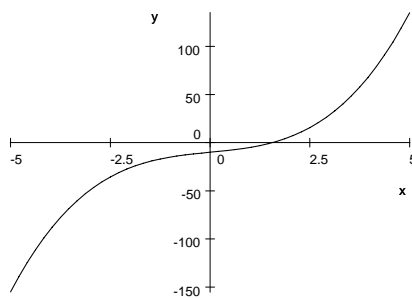
$f'(x) = 3x^2 + p > 0$ , tenemos una función creciente, y de nueva cuenta tenemos sólo una raíz real.

Ejemplo:

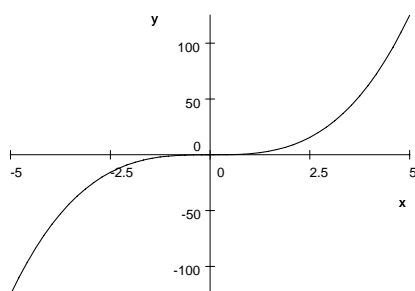
$$x^3 + 4x + 10$$



$$x^3 + 4x - 10$$



Finalmente el caso  $f(x) = x^3$



Lo que tenemos es que la única posibilidad para que tengamos tres soluciones distintas reales es cuando

$$f\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)f\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right) < 0.$$

Lo interesante para nosotros es que teniendo una ecuación cúbica con coeficientes reales  $p$  y  $q$ , con raíces reales y queremos resolverla, en algún momento tenemos que pasar por  $\mathbb{C}$ .

Se demuestra en la Teoría de Galois sobre las ecuaciones algebraicas que este problema no es exclusivo de la fórmula de del Ferro-Tartaglia-Cardano, sino algo más intrínseco: cualquier procedimiento general para resolver la ecuación de tercer grado usando, a partir de los coeficientes, las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces, debe pasar en el caso irreducible por los números complejos.

**¿Se puede factorizar  $x^4 + a^4$ ?**

Otro ejemplo que muestra de nueva cuenta la necesidad de los números complejos para resolver problemas reales, es el trabajo que realizó Jean Bernoulli al integrar algunas funciones racionales por el método de fracciones simples, llegando a preguntarse si se podía expresar un polinomio de coeficientes reales como producto de factores de primer y segundo grado con coeficientes reales.

Durante el siglo XVIII se seguía desarrollando la teoría de los números complejos por diversos matemáticos. Leibniz y Jean Bernoulli encontraron muchas integrales de funciones racionales por el método de fracciones simples.

"Bernoulli afirmó en las *Acta Eruditorum* de 1702 que la integral de cualquier función racional no implicaba más funciones trascendentes que las trigonométricas y la logarítmica. Como el denominador de una función racional es un polinomio en  $x$  de grado  $n$ , la validez de esa afirmación dependía de si cualquier polinomio con coeficientes reales podía

expresarse como producto de factores de primer y segundo grado con coeficientes reales. En su artículo de las *Acta* de 1702, Leibniz opinaba que ello no era posible y daba el ejemplo  $x^4 + a^4$ . Señalaba que

$$\begin{aligned} x^4 + a^4 &= (x^2 - a^2\sqrt{-1})(x^2 + a^2\sqrt{-1}) = \\ &= \left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right) \left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right) \left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right) \left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right) \end{aligned}$$

y, según él, para ningún par de esos cuatro factores se verificaba que su producto fuese un factor cuadrático con coeficientes reales. Si hubiese sido capaz de expresar la raíz cuadrada de  $\sqrt{-1}$  y de  $-\sqrt{-1}$  como números complejos ordinarios, se hubiese apercebido de su error. Nicolaus Bernoulli (1687-1759), un sobrino de Jacques y Jean, indicó en las *Acta Eruditorum* de 1719 que:

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2a^2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)$$

de donde se sigue que la función  $\frac{1}{x^4 + a^4}$  se puede integrar en términos de funciones trigonométricas y de la logarítmica".<sup>4</sup>

## 1.2. Recapitulación de las propiedades elementales

Vamos a recordar ahora la construcción y las propiedades elementales de los números complejos.

### 1.2.1. Campo “no ordenado”

Si consideramos a  $\mathbb{R}^2$  y definimos para las parejas ordenadas,  $z := (x, y)$ , de números reales una multiplicación:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

y para la suma tenemos:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

obtenemos que se cumple:

$$1. \text{Ley asociativa: } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$2. \text{Ley conmutativa: } z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$3. \text{Ley distributiva: } z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Existe el elemento cero como  $0 := (0, 0)$  y el elemento unidad  $1 := (1, 0)$ ;

El inverso aditivo de  $z := (x, y)$ , es  $-z := (-x, -y)$  y si  $z \neq 0$  tenemos el inverso multiplicativo

---

<sup>4</sup>Morris Kline [1972].

$$z^{-1} := \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

A este campo se le llama el campo de los números complejos y lo denotamos  $\mathbb{C}$   
Si hacemos la correspondencia

$$x \rightarrow (x, 0)$$

de

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

vemos que el campo de los reales,  $\mathbb{R}$ , está metido en  $\mathbb{C}$ , porque se sigue cumpliendo que :

$$\begin{aligned} (x_1, 0)(x_2, 0) &= (x_1x_2, 0) \\ (x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0) \end{aligned}$$

Lo que estamos haciendo es identificar el número real  $x$  con el número complejo  $(x, 0)$ , por esta identificación se dice que  $\mathbb{C}$  es una extensión de  $\mathbb{R}$ . Ahora definimos

$$i := (0, 1)$$

donde  $(0, 1) \in \mathbb{C}$ , es claro que  $i^2 = (0, 1)(0, 1) = -1$ , a este número  $i$  se le llama unidad imaginaria de  $\mathbb{C}$ .

Por tanto, todo número

$$z := (x, y) \in \mathbb{C}$$

tiene una única representación

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

esto es

$$z = x + iy \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

Se le llama la parte real de  $z$  al valor  $x$ :

$$\operatorname{Re} z := x$$

y la parte imaginaria de  $z$  al valor  $y$  :

$$\operatorname{Im} z := y$$

(Obsérvese que la *parte imaginaria* de un número complejo es el número real  $y$  y no el imaginario  $yi$ .)

El número  $z$  es real si  $\operatorname{Im} z = 0$  y es imaginario puro si  $\operatorname{Re} z = 0$ .

En el campo de los números complejos no hay un orden, es decir, que no hay un

orden compatible con las operaciones: ( $\alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$  y  $\alpha\beta > 0$ ). El orden usual en los números reales cumple con estas condiciones, pero no  $\mathbb{C}$ , por tanto, no es posible extender ese orden o construir ningún otro. El hecho fundamental es que tenemos en  $\mathbb{C}$  un número cuyo cuadrado es negativo ( $i^2 = -1$ ) lo cual no es compatible con la existencia de un tal orden. (El lector podrá fácilmente convertir esta observación en una demostración). Sin embargo  $\mathbb{C}$  tiene muchas otras propiedades muy especiales, que no tienen los campos ordenados.

### 1.2.2. Raíz cuadrada

Las raíces cuadradas de cualquier número complejo pueden obtenerse de manera directa.

Sea  $w = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ , queremos encontrar un  $z = x + iy$  tal que  $z^2 = w$ , o sea que  $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$ , lo que equivale a  $x^2 - y^2 + i2xy = \alpha + i\beta$ .

Esto nos da un sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= \alpha \\2xy &= \beta\end{aligned}$$

Éste puede resolverse directamente despejando  $y$  de la segunda ecuación y substituyendo en la primera. Otra forma de hacerlo es como sigue:

Observemos que  $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

Por tanto:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Luego  $x^2 = -y^2 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha - x^2 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,

$$x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

Como  $y^2 = x^2 - \alpha$ ,

$$y^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

Para encontrar  $x$  y  $y$  basta tomar otra vez raíces cuadradas. No hay ningún problema en el procedimiento porque todos los números a los que hay que extraer raíz cuadrada son reales no negativos.

Está claro que no podemos tomar arbitrariamente las diversas combinaciones de las raíces cuadradas de las expresiones anteriores, porque se debe cumplir que el producto

$xy$  tenga el signo de  $\beta$ , dándonos únicamente dos raíces simétricas, es decir,  $z$  y  $-z$  (y no *cuatro*, lo cual sería muy extraño).

Tomando ese cuidado, la solución general se puede escribir así:

$$\sqrt{w} = \pm \left( \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \frac{\beta}{|\beta|} \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right) \text{ si } \beta \neq 0$$

$$\sqrt{w} = \pm \sqrt{\alpha} \text{ si } \alpha \geq 0 \text{ y } \beta = 0$$

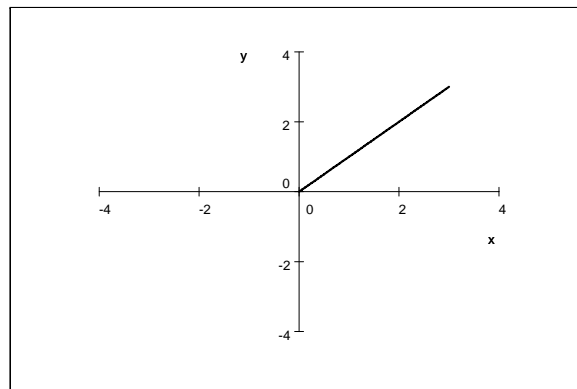
$$\sqrt{w} = \pm i \sqrt{-\alpha} \text{ si } \alpha < 0 \text{ y } \beta = 0$$

No sólo podemos obtener raíces cuadradas, sino también resolver cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes complejos: Si tuviéramos un polinomio cuadrático  $z^2 + cz + d \in \mathbb{C}$ , y lo transformamos completando el cuadrado en  $(z + \frac{1}{2}c)^2 + d - \frac{1}{4}c^2$ , es fácil ver cómo mediante el cálculo de la raíz cuadrada se determinan los ceros de este polinomio. Entonces, por la fórmula usual, vemos que todo polinomio de grado 2 con coeficientes complejos tiene raíces complejas.

### 1.2.3. Representación geométrica

El hecho de poder identificar a  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  es muy importante porque nos permitirá hacer mucho análisis y mucha geometría. El número complejo  $z = x + iy$  se interpreta geoméricamente (diagrama de Argand ó plano- $z$ ) como el punto  $(x, y)$  en el plano  $xy$ .

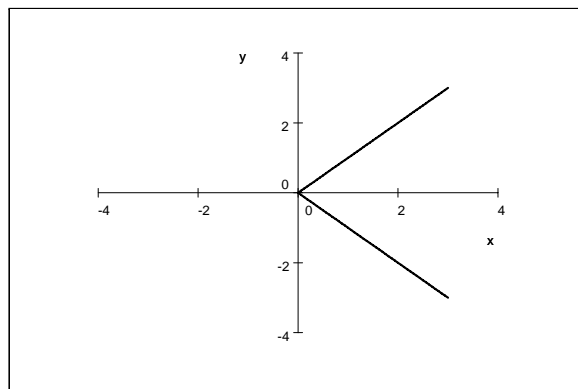
Dos números complejos son iguales si sus respectivas partes reales e imaginarias son iguales, de modo que sus puntos representativos en el plano coinciden.



### 1.2.4. Conjugación

La conjugación compleja es la transformación que manda  $z = x + iy$  en  $\bar{z} = x - iy$ . Geométricamente tenemos una reflexión con respecto al eje real.





Si  $z = x + iy$  entonces  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ , y como este valor es no negativo, podemos sacarle raíz cuadrada. Así, se define el módulo o valor absoluto de cualquier número complejo como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Y es igual a la distancia del punto  $z$  al origen del plano  $xy$ .

Propiedades del módulo:

a)  $|z| \geq 0$ ; si  $|z| = 0$  entonces  $z = 0$

b)  $z\bar{z} = |z|^2$

c)  $|\bar{z}| = |z|$

d)  $|-z| = |z|$

e)  $|zw| = |z||w|$

f) Si  $w \neq 0$  entonces  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

g)  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

$|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

h)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (Desigualdad del triángulo)

Si  $z \neq 0$ , observemos que  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . Luego  $z^{-1}$  está en la misma dirección que  $\bar{z}$  con módulo  $\frac{1}{|z|}$ .

En particular,  $z^{-1} = \bar{z}$  si  $|z| = 1$ .

Y algunas de las propiedades de la conjugación son:

a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

b)  $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

c)  $\overline{\bar{z}} = z$

d) Si  $w \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

e)  $\overline{\bar{z}} = z$

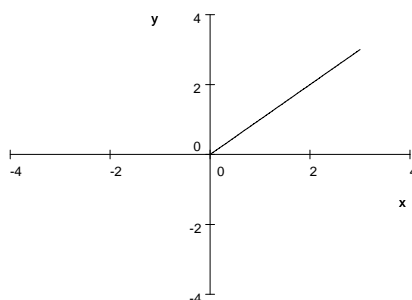
f)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$

Las propiedades a) y c) de la conjugación nos expresan que ésta es un *automorfismo*

del campo de los complejos, es decir, una transformación invertible del campo  $\mathbb{C}$  en sí mismo que preserve todas las operaciones. En otras palabras, es una simetría de la estructura algebraica de  $\mathbb{C}$  y se deriva del hecho de que  $i$  y  $-i$ , ambas raíces del polinomio  $x^2 + 1$ , tienen exactamente las mismas propiedades.

Para un complejo  $z$  distinto de 0, el ángulo  $\theta$  medido de la parte positiva del eje real al radio vector determinado por  $z$  es llamado el argumento de  $z$  y es denotado por  $\arg z$ .



De donde se satisface que:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{x}{|z|}, \quad \text{sen} \theta = \frac{y}{|z|}$$

Se considera orientación positiva del ángulo la señalada por la flecha (sentido levógiro).<sup>5</sup>

El ángulo que satisface las relaciones anteriores, queda unívocamente definido salvo por un múltiplo de  $2\pi$ .

De modo que siempre es posible expresar un número complejo distinto de cero en *forma polar*:

$$z = |z| (\cos \theta + i \text{sen} \theta)$$

Más adelante veremos que esta expresión nos ayuda a visualizar geoméricamente la multiplicación de complejos, pero analicemos un poco la forma polar (trigonométrica). En primer lugar si  $z = 0$  el módulo es 0, mientras que el argumento carece de sentido, podemos darle el valor que queramos. En segundo lugar si  $z \neq 0$  el argumento de  $z$  no está tan bien definido, sin embargo ya no tenemos tantas opciones.  $\theta = \arg z$  es un conjunto, una colección de números, es una clase de equivalencia módulo  $2\pi$ , es un número tal que si le sumo  $2\pi$  es el mismo, no cambia.

Escoger  $\theta$  dentro de ciertos límites a veces es conveniente, por ejemplo si  $z \neq 0$  existe uno, sólo uno de los valores del argumento para el rango comprendido entre  $-\pi$  y  $\pi$ , a este valor se le denomina *valor principal del argumento*, algunos libros lo denotan  $\theta = \text{Arg } z$ .

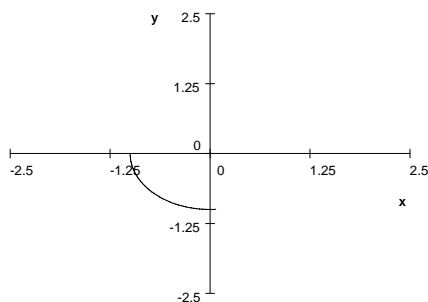
---

<sup>5</sup>Sentido contrario a las manecillas del reloj.

Pero también existen desventajas, por ejemplo:

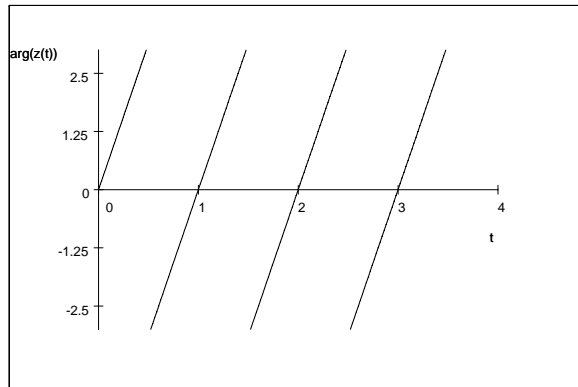
si  $-\pi < \theta \leq \pi$  y a cada número complejo  $\neq 0$  le asociamos su argumento tendríamos una discontinuidad en el argumento.

Si tomáramos una sucesión en el semiplano inferior que converja al  $-1$ , por ejemplo, los argumentos van decreciendo tendiendo a  $-\pi$ , aunque  $\arg(-1) = \pi$ .



Eso sucedería con cualquier punto en el eje real negativo, por lo que la función  $\arg z$  es discontinua en todo el intervalo  $(-\infty, 0)$ .

Para visualizar la discontinuidad de salto, grafiquemos  $\{(t, \arg(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ , considerando que  $z(t) = \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t$  (es decir, que al variar la  $t$  en intervalos unitarios le damos la vuelta completa a una circunferencia y vamos tomando el argumento en cada punto del recorrido).



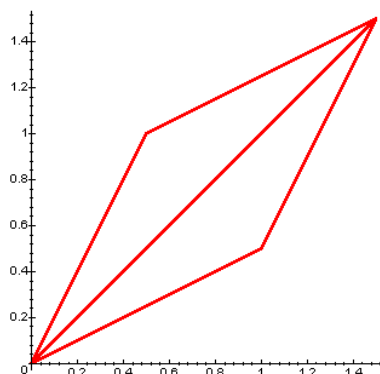
Así, todo número complejo tiene su módulo  $r = |z|$  y su argumento (módulo  $2\pi$ ).

**Ejemplo 1.1**  $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$

### 1.2.5. Interpretación geométrica de las operaciones

Suma

Si representamos  $z_1$  y  $z_2$  por vectores en el plano complejo, la suma  $z_1 + z_2$  y la resta  $z_1 - z_2$  son, lo mismo que en  $\mathbb{R}^2$ . Las diagonales del paralelogramo generado por  $z_1$  y  $z_2$ .



suma

Y también se cumple la desigualdad del triángulo:

$$(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

### Multiplicación

Si los números complejos  $z_1$  y  $z_2$  son expresados en coordenadas polares:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

la multiplicación nos da:

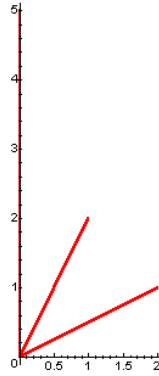
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

y la división :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad r_2 \neq 0$$

es decir, que al multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos, y al dividir se dividen los módulos y se restan los argumentos.



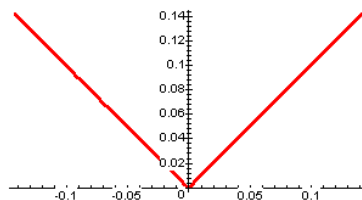
multiplicación

En particular si la multiplicación de  $z_1$  es con un  $z_2$  cuyo módulo es 1, tenemos una rotación del vector  $z_1$  alrededor del origen en sentido levógiro de un ángulo  $\theta_2$ .

**Ejemplo 1.2** El producto  $zi = (x + iy)i = xi - y = -y + ix$

$$\arg(zi) = \arg z + \arg i = \arg z + \frac{\pi}{2}$$

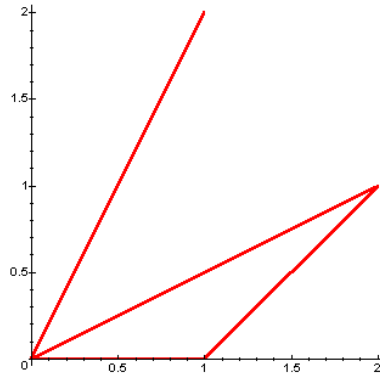
$$|zi| = |z| |i| = |z| 1 = |z|$$



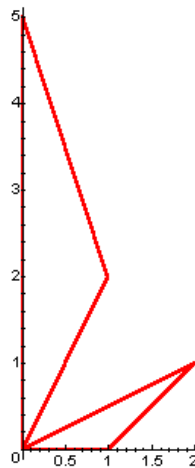
es decir, nos resulta un vector ortogonal a  $z$ , con su mismo módulo (girado en sentido positivo).

Una construcción geométrica del producto es la siguiente:

Dados los puntos  $0, 1, z_1, z_2$ , construimos un triángulo con vértices  $0, 1$  y  $z_1$  :



Y luego por semejanza construimos otro triángulo obteniendo el punto  $z_1 z_2$



multiplicación

El triángulo con vértices  $0, 1, z_1$  es semejante al triángulo con vértices  $0, z_2, z_1 z_2$ .

Tenemos que  $\alpha = \arg(z_1 z_2) - \arg(z_2)$  es igual al  $\alpha' = \arg z_1$  y sus lados adyacentes son proporcionales

$$\frac{|z_1|}{1} = \frac{|z_1 z_2|}{|z_2|}.$$

### 1.2.6. Representación de $\mathbb{C}$ con matrices

Cada número complejo lo podemos pensar como una transformación del plano. Es una transformación lineal y como tal le podemos asociar una matriz, sea  $\alpha = a + ib$

entonces

$$\alpha \cdot (x, y) = (a + ib)(x + iy) = (ax - by, ay + bx) = M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donde  $M_\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Así, a cada complejo  $\alpha$  le hacemos corresponder una matriz  $M_\alpha$  :

$$\alpha = a + ib \rightarrow M_\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Y todas las operaciones con complejos corresponden a operaciones con matrices:

$$M_{\alpha+\beta} = M_\alpha + M_\beta$$

$$M_{\alpha\beta} = M_\alpha M_\beta$$

$$M_{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Dicho de otra manera, podemos establecer una correspondencia entre los números complejos y las transformaciones del plano; para un algebrista los complejos son un conjunto con ciertas operaciones, etc., y para un geómetra serán transformaciones del plano. Así, tenemos otra representación de los números complejos en términos de objetos más familiares como las matrices.

### 1.2.7. Fórmula de De Moivre

Observemos que  $z^2 = zz$  es el número que tiene por módulo  $|z|^2$  y argumento  $2\theta$ .

De modo que

$$z^2 = |z|^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

Y en general si  $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

para  $|z| = 1$ , obtenemos  $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$  que es la *Fórmula de De Moivre*.

Se puede ver que si el exponente es entero, no hay problema pues  $z^0 = 1$  y si es negativo  $z^{-1} = |z|^{-1} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))$

A partir de la *Fórmula de De Moivre* se pueden deducir diversas identidades trigonométricas, como por ejemplo  $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi$ .

### 1.2.8. Raíces

Si existe un número  $\xi \in \mathbb{C}$  tal que  $\xi^n = z$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), se dice que  $\xi$  es una raíz enésima de  $z$ ,  $\xi = z^{\frac{1}{n}}$

Si  $z = 0$ , se tiene que  $\xi = 0$

Si  $z \neq 0$ , tenemos:

sean  $z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$  y  $\xi = s(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  entonces resolviendo esta ecuación:

$$s^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} s &= r^{\frac{1}{n}} \\ \theta &= \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

$$\xi = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

donde  $k$  es un entero y toma los valores  $0, 1, 2, \dots, n-1$  para tener soluciones distintas. Un caso importante es cuando  $z = 1$ , que son las raíces enésimas de la unidad

$$\omega_k = \left[ \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

Todos los valores de  $\xi = z^{\frac{1}{n}}$  se pueden obtener a partir de las raíces enésimas de la unidad, multiplicándolas por la raíz obtenida para  $k = 0$ ,  $\xi = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{n} \right) \right)$ , es decir,  $\xi \omega_k$  donde  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Veamos un ejemplo, para  $n = 4$ :

**Ejemplo 1.3** *Calculemos las raíces cuartas de la unidad*

$$z_k = \cos\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_1 = 1$$

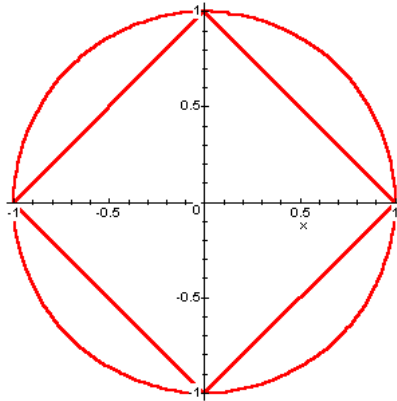
$$z_2 = i$$

$$z_3 = -1$$

$$z_4 = -i$$

*Las cuatro raíces se encuentran a lo largo del círculo e igualmente espaciadas*





Geoméricamente las  $n$  raíces de cualquier número complejo distinto de cero, son los vértices de un polígono regular con  $n$  lados.

## 1.3. Importancia y Singularidad de los Números Complejos

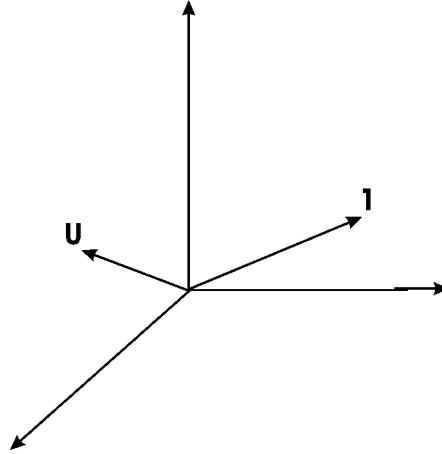
Hemos visto hasta ahora que los números complejos son un campo, que lo obtuvimos extendiendo el de los números reales. Tenemos pares ordenados con un producto bien definido y todo funciona muy bien. Pero una pregunta interesante sería ¿Podrémós hacer lo mismo con ternas o cuartetos?

No, no se puede. Esta conclusión a la que se llegó a comienzos del siglo XIX, fue el resultado de muchos intentos por construir extensiones que cumplieran con todas las propiedades de campo. Sin embargo el matemático irlandés William R. Hamilton (1805-1865) a mediados siglo XIX encontró una forma de multiplicar cuartetos pero resultó no ser campo. El anillo de los *cuaternios* ha dado impulso al desarrollo del álgebra de vectores (estudio de la mecánica y de la física), pero no ha llegado a tener la importancia de los números complejos. Actualmente su interés primario es el de ser un ejemplo histórico importante, aunque aún desempeña un papel relevante en geometría y en la teoría de números.

### 1.3.1. El caso de $\mathbb{R}^3$

Veamos como, ya para  $\mathbb{R}^3$ , no es posible obtener un campo.

Supongamos que sí existe una estructura de campo en  $\mathbb{R}^3$ , entonces existe un elemento unidad  $1 \neq 0$ . Esto implica que tenemos los números reales como subcampo, a saber, el de todos los múltiplos escalares del 1.



Consideremos un elemento  $u \in \mathbb{R}^3, u \notin \mathbb{R}$ . Si  $u$  está en  $\mathbb{R}^3$ , también están  $u^2$  y  $u^3$ , y el conjunto  $\{1, u, u^2, u^3\}$  constaría de cuatro vectores de  $\mathbb{R}^3$  que tendrían que ser linealmente dependientes. Es decir, se cumple una relación  $au^3 + bu^2 + cu + d = 0$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  no todos nulos.

Si  $a$  no es cero, ésta es una ecuación de tercer grado. Pero sabemos que todo polinomio de tercer grado con coeficientes reales tiene por lo menos una raíz real. Si  $x_0$  es una solución real de nuestra ecuación, la podemos factorizar de la forma

$$(u - x_0)(a'u^2 + b'u + c') = 0$$

Así  $u$  debe satisfacer la ecuación de segundo grado. Si  $a$  fuera cero, nuestra ecuación será de entrada de segundo grado (no puede ser de primer grado, porque  $u$  no está en  $\mathbb{R}$ ). En cualquier caso podemos resolver la cuadrática de la manera usual:

Simplificando  $a'u^2 + b'u + c' = 0$  en  $u^2 + Bu + C = 0$  y completando cuadrados tenemos:

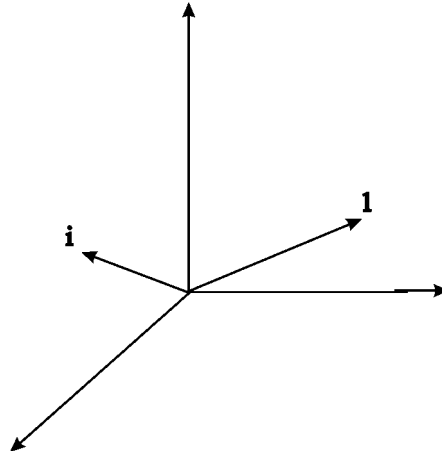
$$\left(u + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{B^2}{4} - C = \frac{B^2 - 4C}{4}$$

Afirmamos que  $\frac{B^2 - 4C}{4}$  debe ser negativo, porque si es mayor o igual que cero, tendríamos dos soluciones reales  $u_1, u_2$ , posiblemente iguales y habría entonces tres soluciones de una ecuación cuadrática: las dos anteriores y  $u$ , y esto no puede pasar en un campo.

Si  $\frac{B^2 - 4C}{4} < 0$  entonces existe un número cuyo cuadrado es un real negativo:

$$\left(u + \frac{B}{2}\right)^2 = -r^2 \Rightarrow \left(\frac{u + \frac{B}{2}}{r}\right)^2 = -1$$

Esto quiere decir dos cosas: la primera que nuestro campo contiene a  $i$ , por tanto, contiene una copia de  $\mathbb{C}$ ; la segunda, que  $u$  está contenido en esta copia de  $\mathbb{C}$ . Pero esto implica que todos los elementos de  $\mathbb{R}^3$  están contenidos en un plano, lo cual es absurdo.



En realidad no es posible extender a más dimensiones finitas el campo de los números complejos.

Decir que no hay extensión significa afirmar que el campo es algebraicamente cerrado, y así,  $\mathbb{C}$  es algebraicamente cerrado (Todo polinomio complejo no constante tiene una raíz compleja).

### 1.3.2. Los cuaternios

Sea  $\mathcal{Q}$  el conjunto de todos los símbolos  $\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$  donde todos los números  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ .

Convenimos en que dos de tales símbolos :

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k$$

son iguales si y sólo si  $\alpha_t = \beta_t$  para  $t = 0, 1, 2, 3$

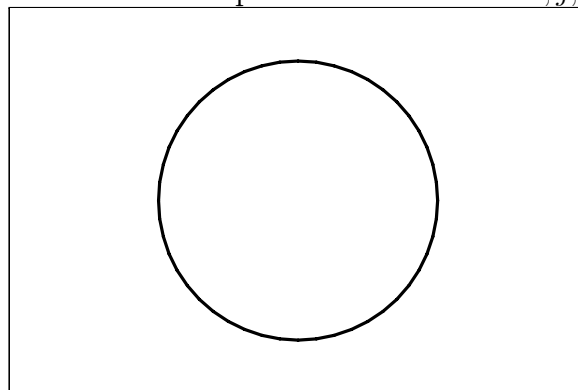
Se define la suma y el producto de la siguiente manera:  $x, y \in \mathcal{Q}$

a)  $x + y = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1) i + (\alpha_2 + \beta_2) j + (\alpha_3 + \beta_3) k$

Definimos la tabla de multiplicar:

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1$$

Los puntos  $i, j, k$  representan los correspondientes cuaternos  $i, j, k$ .



El producto de dos cuaternios adyacentes es igual al tercero si para ir del primero al segundo en el figura, por el camino más corto, se hace en el mismo sentido de avance de las agujas del reloj. Conocida la tabla de multiplicar de los cuaternios  $i, j, k$  se puede efectuar el producto de dos cuaternios arbitrarios:

$$b) \quad xy = (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) i + (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1) j + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0) k$$

Es importante señalar que la multiplicación no es conmutativa.

Tenemos el elemento cero

$$0 = 0 + 0i + 0j + 0k$$

y el elemento unidad

$$1 = 1 + 0i + 0j + 0k$$

La parte real del cuaternio  $x = \alpha_0 + \alpha_1i + \alpha_2j + \alpha_3k$ , es  $\alpha_0$  y la parte vectorial es  $\alpha_1i + \alpha_2j + \alpha_3k$ .

$\bar{x} = \alpha_0 - \alpha_1i - \alpha_2j - \alpha_3k$  es el conjugado de  $x$ .

$$x + \bar{x} = 2\alpha_0 \in \mathbb{R}$$

$x\bar{x} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$  a esta suma de cuadrados se le llama norma del cuaternio.

Puesto que el cuadrado de todo número real es no negativo, la norma de todo cuaternio es también no negativa y es igual a cero sólo para el cuaternio nulo.

También podemos conocer el inverso multiplicativo de  $x$

Para todo  $x \in \mathcal{Q}$  distinto de cero existe su inverso dado por

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

### Interpretación geométrica del producto de cuaternios puros:

$$q = x_1i + x_2j + x_3k$$

$$p = y_1i + y_2j + y_3k$$

$$qp = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + (x_2y_3 - x_3y_2)i + (x_3y_1 - x_1y_3)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k$$

si representamos a  $q, p$  como vectores en  $\mathbb{R}^3$

$$q = (x_1, x_2, x_3)$$

$$p = (y_1, y_2, y_3).$$

El producto escalar  $q \cdot p = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = -(-x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)$

y el producto vectorial  $q \times p =$

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k = (x_2y_3 - x_3y_2)i + (x_3y_1 - x_1y_3)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k$$

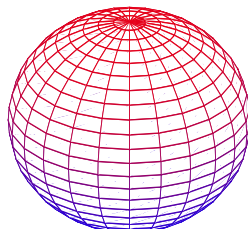
Así tenemos una interpretación geométrica para cuaternios puros que nos permite usar resultados del producto escalar y producto vectorial.

$$2qp = -(q \cdot p) + q \times p$$

**Ejemplo 1.4** ¿Cuántas raíces tiene la siguiente ecuación ?

$$x^2 + 1 = 0$$

se pueden encontrar rápidamente 6 raíces  $\pm i, \pm j, \pm k$   
 ¿Serán todas las soluciones?  
 Observemos que si  $x = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$  tiene norma 1,  
 $x^2 = -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = -|x|^2 = -1$



*Toda la esfera unitaria sería solución, es decir, ¡tenemos una infinidad de soluciones!*

Otra álgebra donde hay inverso multiplicativo es la de los números de Cayley, pero ya no hay más. De aquí la importancia del estudio del campo  $\mathbb{C}$ .

### 1.3.3. Factorización de polinomios reales

Los números complejos son muy útiles, muchos problemas en  $\mathbb{R}$  vistos en  $\mathbb{C}$  adquieren mejor panorama y se simplifica su solución. Un ejemplo de esto es la factorización de polinomios. En la búsqueda de resolver integrales de funciones racionales, los matemáticos nuevamente se enfrentaban con los números complejos (ver parte uno de este capítulo). La conclusión que más tarde expresaría un matemático francés, refleja muy bien este fenómeno al decir, "El camino más corto entre dos resultados sobre los números reales pasa frecuentemente por los complejos".<sup>6</sup>

Para ver este ejemplo, consideremos un teorema muy importante, del que, a lo largo de este curso veremos varias demostraciones:

**Teorema Fundamental del Algebra (TFA):** *Todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz compleja.*

Como consecuencia del TFA, tenemos que todo polinomio complejo de grado  $n$ , tiene  $n$  y sólo  $n$ , raíces complejas  $z_1, \dots, z_n$  las cuales, sin embargo, no deben ser distintas todas.

---

<sup>6</sup>Jacques-Salomon Hadamard(1865-1963).Matemático francés.

Además lo podemos representar como producto de  $n$  factores lineales  $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$ .

**Ejemplo 1.5**  $z^5 - 3z^4 + 7z^3 - 13z^2 + 12z - 4 = (z - 1)^3(z^2 + 4) = 0$   
*tiene cinco raíces de las cuales, sin embargo, solamente tres son diferentes:*  
 $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ ,  $z_4 = 2i$  y  $z_5 = -2i$

Ahora, si todos los coeficientes del polinomio  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  son reales y  $\alpha \in \mathbb{C}$  es raíz entonces  $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$  también es raíz, esto se desprende de las reglas de operaciones con números complejos:

$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$0 = \bar{0} = \overline{P(\alpha)} = \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0} = a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_0 = P(\bar{\alpha}).$$

**Teorema 1.1** *Todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar como producto de polinomios de grado uno o dos con coeficientes reales.*

**Demostración**  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$

Por el TFA:

$$P(z) = a_n(z - z_1)\dots(z - z_n).$$

Supongamos que  $z_1 \dots z_k$  son las raíces reales.

Si  $i > k$ , como  $z_i$  es raíz entonces también  $\bar{z}_i$

$$\text{y } (z - z_i)(z - \bar{z}_i) = z^2 - (z_i + \bar{z}_i)z + (z_i \bar{z}_i) = z^2 - z 2 \operatorname{Re} z_i + |z_i|^2$$

donde  $2 \operatorname{Re} z_i, |z_i|^2 \in \mathbb{R}$

por tanto  $z^2 - z 2 \operatorname{Re} z_i + |z_i|^2$  es un polinomio de grado 2 en  $z$  con coeficientes reales.

$$P(z) = a_n(z - z_1)\dots(z - z_k) \prod_i^v (z^2 - z 2 \operatorname{Re} z_i + |z_i|^2), \quad \text{donde } v = \frac{n-k}{2}$$

obteniendo así  $k$  factores lineales y  $\frac{n-k}{2}$  factores cuadráticos. ✓ ■

**Ejercicio 1.1** *Factorizar  $x^4 + a^4$*

## 1.4. Teorema Fundamental del Algebra

### 1.4.1. Prefiguración de algunas ideas sobre las transformaciones complejas

La posibilidad de visualizar geoméricamente a los números complejos en el plano, nos permitirá comprender más a las funciones complejas y usar todo lo que ya sabemos para  $\mathbb{R}^2$  (conjuntos abiertos, cerrados, compactos, conexos, sucesiones convergentes, etc.)

Una función compleja de variable compleja estará definida en un subconjunto abierto contenido en  $\mathbb{C}$  y la imagen estará en  $\mathbb{C}$ .

Nuestro problema será ver qué sucede con puntos, líneas, círculos, etc., en qué se transforman, cuál es su imagen, es decir, queremos saber cómo se *transforma* el plano complejo.

Es usual denotar al plano donde está el punto  $z$  (Dominio) como *plano  $z$*  y al plano donde está la imagen  $w = f(z)$ , el *plano  $w$* .

En el capítulo II, ampliaremos el estudio de las transformaciones del plano complejo. Por el momento veamos sólo algunas de ellas.

Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}$

$f(z) = a$ , todo el plano va a un punto.

$f(z) = z$ , el plano se queda igual

$f(z) = \bar{z}$ , el plano se refleja con respecto al eje real

$f(z) = z + a$ , el plano se traslada, sin girar. El origen va al punto  $a$ .

Recordemos que el producto de dos números complejos es un número complejo con módulo igual al producto de los módulos y su argumento es la suma de los argumentos de los factores. Consideremos  $a \neq 0$

$f(z) = az$ , cualquier vector  $z$ , gira un ángulo igual al  $\arg a$  y se agranda (o se achica) el módulo de  $z$  un factor  $|a|$ . Todo el plano gira y se expande (o contrae).

$f(z) = z^n$  :

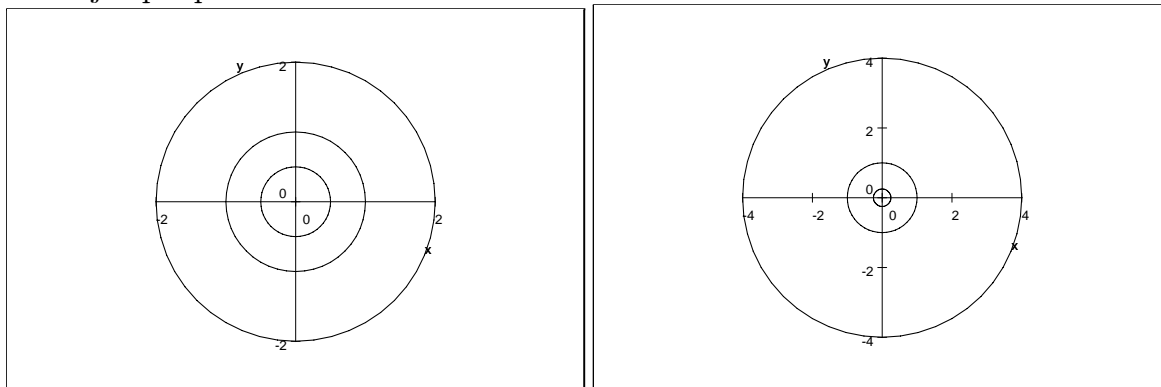
$w = 0$  si  $z = 0$

si  $z \neq 0$ , escribimos a  $z$  en forma polar  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  y el punto imagen nos queda  $w = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ . El módulo del vector  $z$  se eleva a la potencia  $n$  y su argumento se multiplica por  $n$ .

Si  $r > 0$ , un círculo de radio  $r$  ( $|z| = r$ ) en el *plano  $z$*  se transforma en otro círculo de radio  $r^n$  ( $|w| = r^n$ ).

Si el módulo de  $z$  va creciendo entonces al elevarlo a la potencia  $n$  el módulo del vector  $w$ , también irá creciendo.

Por ejemplo para  $n = 2$  :



## 1.4.2. Demostración elemental del Teorema Fundamental del Algebra

Combinando estas funciones obtenemos otras que son muy importantes y que estudiaremos durante el curso, los polinomios.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad (\text{Polinomio complejo de grado } n)$$

La siguiente demostración elemental se basa únicamente en las propiedades que conocemos de los números complejos y de los polinomios:

### **Teorema 1.2** (*Teorema Fundamental del Algebra*)

*Todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz compleja.*

**Demostración** Consideremos un polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Supongamos que para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $p(z) \neq 0$

$$\Rightarrow |p(z)| \neq 0 \text{ por tanto } |p(z)| > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Empezaremos por un lema

**Lema:**

*Si  $p(z)$  es un polinomio no constante, entonces cuando  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $|p(z)| \rightarrow \infty$ .*

Demostración del lema:

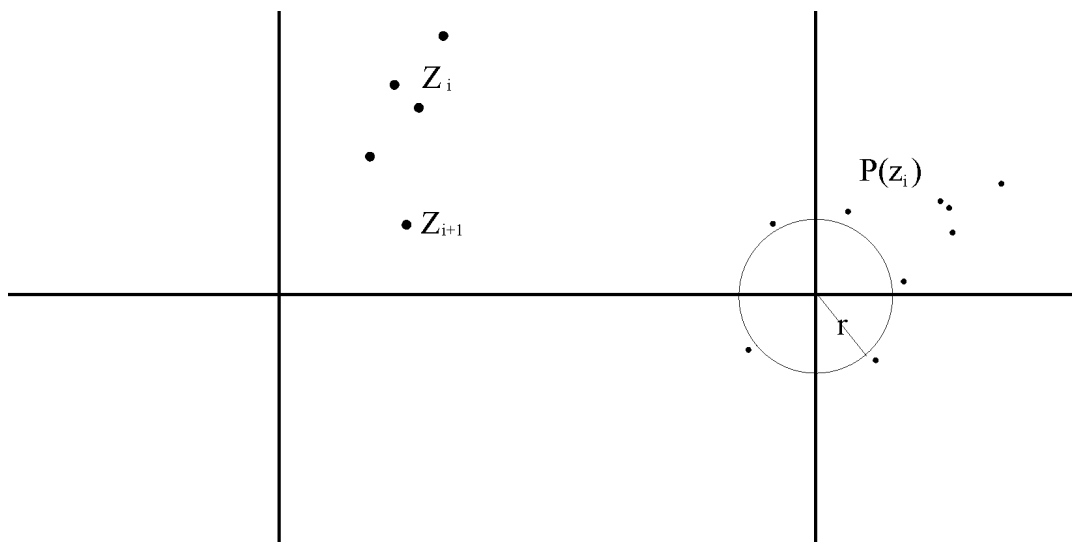
Si escribimos  $p(z)$  como un producto,  $|p(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|$ , vemos que el primer factor tiende a  $\infty$ , mientras que el segundo tiende a la constante  $|a_n| \neq 0$ . Luego, el producto tiende a  $\infty$ .

(Dejamos al lector como ejercicio dar una versión más precisa de la demostración de este lema: dado  $M > 0$ , encontrar  $R > 0$  tal que  $|z| > R$  entonces  $|p(z)| > M$ ).✓

Regresando a la demostración del TFA:

Si no existe un  $z$  con  $p(z) = 0$ , tratemos de ubicar un punto donde  $|p(z)|$  sea lo menor posible. Si tomamos  $r = \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$  vamos a ver que existe algún  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|p(z)| = r$ , es decir, que el ínfimo se alcanza: de la definición de ínfimo tenemos que existe una sucesión  $\{z_i\}$  tal que  $|p(z_i)| \rightarrow r$ .





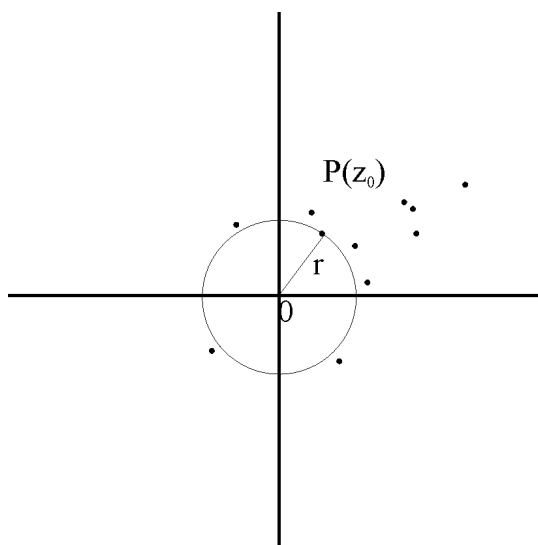
Si la sucesión  $z_i$  convergiera a un punto  $z_0$  tendríamos que  $|p(z_0)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |p(z_i)| = r$ .

Lo mismo sucedería si alguna subsucesión de  $\{z_i\}$  convergiera a  $z_0$ . ¿Podría pasar, sin embargo, que ninguna subsucesión de  $\{z_i\}$  fuera convergente?

Esto sólo podría pasar si en toda bola con centro en el origen hubiera sólo un número finito de puntos de la sucesión (por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, ver apéndice A).

Pero esto querría decir que  $z_i \rightarrow \infty$ , lo cual es imposible ya que, por el lema, tendríamos  $|p(z_i)| \rightarrow \infty$  en contradicción con el hecho de que  $|p(z_i)| \rightarrow r$ .

Luego, tiene que existir alguna subsucesión convergente  $\{z_{i_j}\}$ ,  $z_{i_j} \rightarrow z_0$ , y  $|p(z_0)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |p(z_{i_j})| = r$



$p(z_0)$  sería el punto más cercano al origen de los que están en la imagen de  $p$ . (Naturalmente, podría haber más de un punto a la distancia  $r$  del origen en la imagen de  $z_0$ ).

Por nuestra hipótesis,  $r > 0$ .

Veamos ahora qué sucede si consideramos los puntos  $z$  en un pequeño círculo con centro  $z_0$ : ¿Cómo se moverán los puntos  $p(z)$  correspondientes?

Pongamos  $z = z_0 + h$ ,  $p(z) = a_n(z_0 + h)^n + \dots + a_0$

Desarrollando las potencias de los binomios y agrupando obtenemos

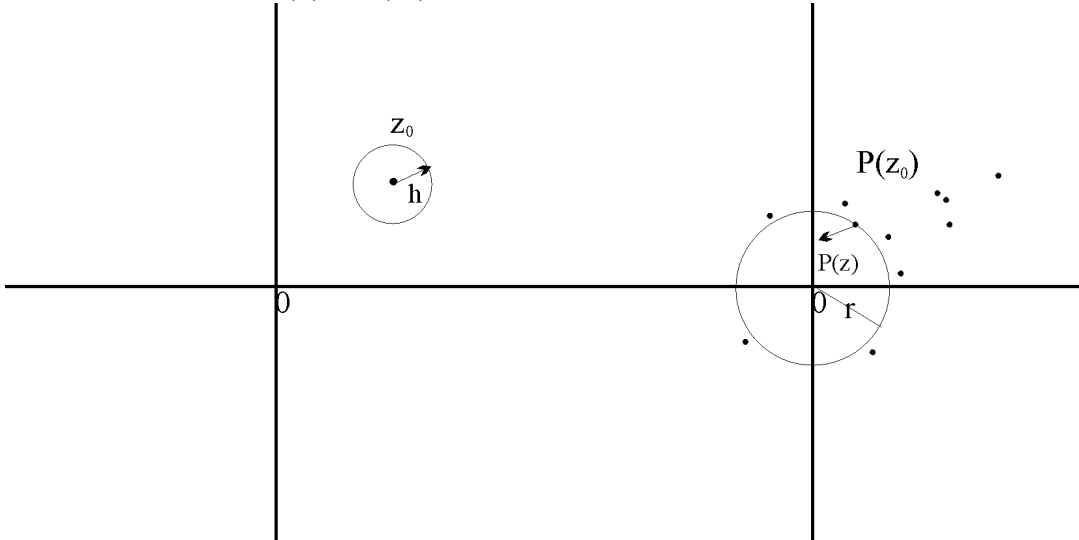
$$p(z) = b_n h^n + \dots + b_1 h + b_0$$

Cuando  $h = 0$ ,  $z = z_0$  y tenemos  $p(z_0) = b_0$ . Y podemos escribir

$$p(z) = p(z_0) + h(b_n h^{n-1} + \dots + b_1) = p(z_0) + h \cdot \beta$$

$$\arg(p(z) - p(z_0)) = \arg h + \arg \beta$$

Suponiendo que  $b_1 \neq 0$ , al recorrer  $h$  un círculo de radio pequeño,  $\arg h$  recorre todos los valores de  $0$  a  $2\pi$ . Mientras tanto,  $\arg(\beta)$  se mantiene casi constante, cercano a  $\arg(b_1)$ . Esto significa que  $p(z) - p(z_0)$  va a apuntar en todas direcciones, y en particular habrá un valor de  $h$  tal que  $p(z) - p(z_0)$  apunte hacia adentro del círculo de radio  $r$ .



Pero esto significa que  $|p(z)| < |p(z_0)| = r$ , contradiciendo el hecho de que  $p(z_0)$  era el punto más cercano al origen de los de la imagen de  $p$ . La única posibilidad de evitar esta contradicción es que  $r$  sea igual a  $0$ , es decir  $p(z_0) = 0$ .

Si  $b_1 = 0$  sólo hay que variar un poco el argumento.

Supongamos que  $b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$  y que  $b_k \neq 0$ . Entonces

$$p(z) - p(z_0) = h^k(b_n h^{n-k} + \dots + b_k) = h^k \cdot \beta,$$

$$\arg(p(z) - p(z_0)) = k \arg h + \arg \beta.$$

Al recorrer  $\arg h$  los valores de  $0$  a  $2\pi$ ,  $k \arg h$  toma  $k$  veces todos los valores de  $0$  a  $2\pi$ , mientras que  $\arg \beta$  varía sólo un poco alrededor de  $\arg b_k$ . Nuevamente esto implica que, para algún valor de  $h$ ,  $p(z)$  apunta hacia adentro del círculo de radio  $r$ , y por tanto, que  $|p(z)| < r$ , llegando nuevamente a la misma contradicción. ■

**Ejercicio 1.2** Concretar el argumento anterior para el caso de un polinomio de grado 3.

La demostración anterior se puede precisar con todo el rigor que el lector exija. Ver apéndice B.

# Capítulo 2

## Transformaciones del Plano Complejo

### 2.1. El Grupo Afín

#### 2.1.1. Traslación. Rotación. Homotecia.

Sin duda la mejor opción para comprender las funciones complejas es verlas como transformaciones del plano en el plano.

Al plano más el “punto al  $\infty$ ”, se le llama plano extendido y se denota por  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Y al plano menos el origen se denota así  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Trabajaremos con funciones de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  y también de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

##### Traslación

Sea  $b \in \mathbb{C}$  fija

$$f(z) = z + b$$

Es una transformación que a cada complejo  $z$  le asocia  $z + b$ , por lo que tenemos una función biyectiva que manda el plano complejo en sí mismo, trasladándolo todo un vector  $b$  (el origen va a parar precisamente a  $b$ ).

##### Rotación y Homotecia

$\alpha \in \mathbb{C}$  fijo

$$f(z) = \alpha z$$

Si  $\alpha = 0$ , todo el plano se va al origen.

Si  $\alpha \neq 0$ :

dado cualquier vector  $z$ , la función lo gira un ángulo igual al  $\arg \alpha$ . Estamos rotando todo el plano, luego tendríamos que multiplicar el módulo de  $z$  por el módulo de  $\alpha$ , es decir, se expande (o contrae) el módulo de  $z$  un factor  $|\alpha|$ . A este movimiento de "zoom" se le llama **homotecia**.

Si  $|\alpha| = 1$ , simplemente tenemos una rotación de un ángulo  $\arg \alpha$ , por ejemplo :

si  $\alpha = i$  se gira todo el plano  $\frac{\pi}{2}$

si  $\alpha = 1$  el plano queda igual

si  $\alpha = -1$  el plano se gira  $\pi$

si  $\alpha = -i$  el plano se gira  $\frac{3}{2}\pi$

Con la interpretación geométrica de las operaciones, se contribuyó mucho a desprenderse de ideas confusas sobre los números complejos y ya no digamos de todo lo "misterioso" que rodeaba al número  $i$ . Tenemos que es un punto bien representado en el plano  $(0, 1)$  y podríamos todavía pensarlo mejor como una transformación del plano en el plano (multiplicar por  $i$  es girar todo  $\mathbb{C}$  un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ ).

Recordemos ahora algunas definiciones y un teorema.

**Definición 2.1**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es lineal:

i) si  $T(u + v) = T(u) + T(v)$       *aditividad*

ii) si  $T(\lambda u) = \lambda T(u)$      $\lambda \in \mathbb{R}$       *homogeneidad ("saca escalares")*

**Definición 2.2** (*Grupo de Transformaciones*)

Si  $T, S \in G$ ,  $T \circ S \in G$

Si  $T \in G$ ,  $T^{-1} \in G$

entonces  $G$  es un grupo .

**Teorema 2.1**  $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es lineal  $\Leftrightarrow \exists$  una matriz  $A$  de  $2 \times 2$  tal que  $l(\bar{x}) = A\bar{x}$   $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$ .

$$A = ( l(\bar{e}_1), l(\bar{e}_2) ) = \begin{pmatrix} l_1(\bar{e}_1) & l_1(\bar{e}_2) \\ l_2(\bar{e}_1) & l_2(\bar{e}_2) \end{pmatrix}.$$

Consideremos nuevamente  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$T_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$T_\alpha(z) = \alpha z$$

Pero, ¿Qué tipo de transformaciones tenemos? ¿Qué propiedades geométricas tienen?

Encontremos la matriz asociada a nuestra transformación:

$$\alpha = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$z = x + iy$$

$$T_{r,\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta transformación lineal es una homotecia seguida de una rotación. Claramente si  $r = 1$ , tenemos una rotación de ángulo  $\theta = \arg(\alpha)$

¿Qué más podemos decir ?

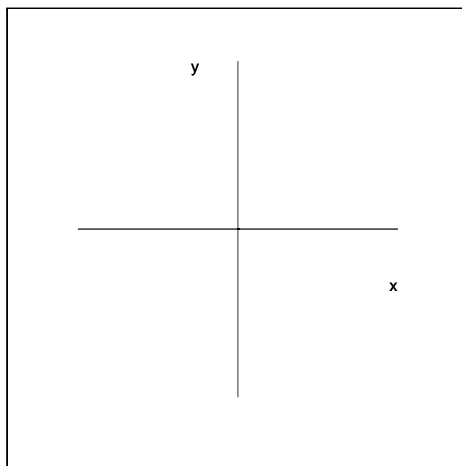
El cero va a dar al cero.

Para el caso  $r = 1$  se conservan las distancias (isometría del plano) y si  $r \neq 1$  se modifican, pero todas se modifican en la misma proporción.

Se conservan los ángulos (ángulo orientado positivamente):

$$\angle(z, w) = \angle(T_{r,\theta}(z), T_{r,\theta}(w)).$$

Esta propiedad es muy importante. Porque cualquier transformación en el plano que preserve los ángulos (transformaciones conformes) su matriz respecto a la base usual tiene que ser de esa forma. Las figuras geométricas en el plano (triángulos, círculos, etc) se transforman en otras semejantes.



### $\mathbb{C}$ -linealidad

Observemos que  $f(z) = \alpha z$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  cumple :

- i)  $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$  y
  - ii)  $f(\lambda z) = \lambda f(z)$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f$  “saca escalares complejos”
- (i) y (ii) quiere decir que  $f$  es  $\mathbb{C}$  -lineal.

Las funciones  $\mathbb{C}$  -lineales son también  $\mathbb{R}$ - lineales, preservan ángulos (conformes) y son invertibles.

Así las cosas, la composición de estas funciones ( $\mathbb{C}$  -lineales) es conforme y la inversa de  $f$  también, por tanto forman un grupo. Esto es importante pues más adelante veremos como esto nos ayudará a ahorrarnos muchos cálculos.

Resumiendo lo visto anteriormente tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineal ( $\mathbb{R}$ - lineal) distinta de la transformación cero entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $T$  es  $\mathbb{C}$  -lineal.
- ii)  $T$  es multiplicar por  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .
- iii) La matriz de  $T$  respecto a la base usual es de la forma
 
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
- iv)  $T$  es una composición de una rotación y una homotecia.
- v)  $T$  preserva ángulos (orientados).

**Demostración** La equivalencia (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) ya está clara de la discusión anterior, así como (ii) $\Rightarrow$ (i) y (iv) $\Rightarrow$ (v).

(i)  $\Rightarrow$  (ii):

Si  $T$  es  $\mathbb{C}$ -lineal entonces  $T(z) = T(1)z = \alpha z$ , donde  $\alpha = T(1) \in \mathbb{C}^*$ .

(v)  $\Rightarrow$  (i):

Sean  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$  la base usual de  $\mathbb{R}^2$ . Como  $T$  preserva ángulos entonces  $T(\bar{e}_1) \perp T(\bar{e}_2)$ .

Además  $T(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$  y  $T(\bar{e}_1)$  forman un ángulo de  $45^\circ$ , por tanto  $|T(\bar{e}_2)| = |T(\bar{e}_1)|$ .

Si  $T(\bar{e}_1) = (a, b)$  entonces  $T(\bar{e}_2) = (-b, a)$  y la matriz tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Por tanto  $T$  es  $\mathbb{C}$ -lineal. ■

Observemos que la conjugación compleja no cumple ninguna de estas propiedades: invierte ángulos, su matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  no es de la forma adecuada y no es  $\mathbb{C}$ -lineal. También podemos tener transformaciones lineales ( $\mathbb{R}$ -lineales) que no preservan los ángulos, es decir, que no son conformes. Por ejemplo la que tiene como su matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### 2.1.2. El Grupo Afín

Ahora si combinamos traslación y rotación con homotecia obtenemos las funciones más generales de la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha z + \beta \\ \alpha &\in \mathbb{C}^*, \quad \beta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

las que son funciones conformes y también forman un grupo, un grupo más grande (el grupo afín).

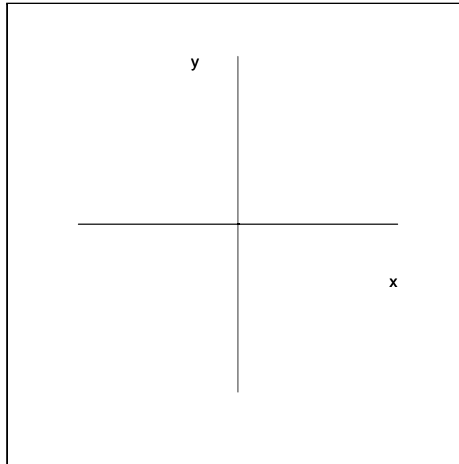
Si agregamos el infinito entonces  $f(\infty) = \infty$ , de aquí el nombre de afín (al infinito). También observamos que son polinomios de grado uno.

Aquí el cero no va a dar al cero. No se preservan las distancias. Sin embargo se modifican guardando una proporción, o sea,  $|f(z_1) - f(z_2)| = |\alpha| |z_1 - z_2|$ .

Nos preguntamos:

¿Qué libertad tenemos para mandar un punto en otro, con una transformación afín?

Podemos ver que con una traslación  $T(z) = z + (z'_1 - z_1)$ , el punto  $z_1$  va al  $z'_1$ .



Es decir, dados  $z_1, z'_1$ , siempre existe una traslación  $T$  tal que  $T(z_1) = z'_1$ .

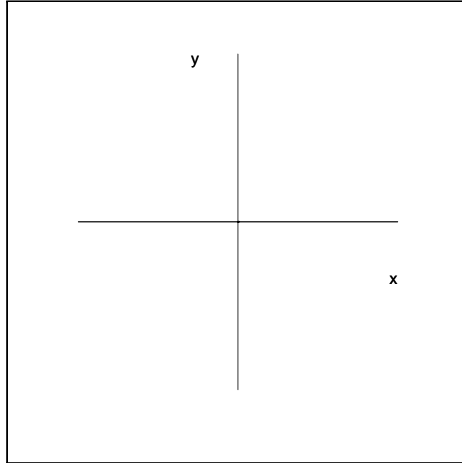
Si damos ahora parejas de puntos  $(z_1, z_2)$  y  $(z'_1, z'_2)$ , ¿existirá una traslación  $T$  tal que  $T(z_1) = z'_1$  y  $T(z_2) = z'_2$ ? Claramente no siempre será posible, porque al pedir la primera condición,  $T(z_1) = z'_1$ , la traslación queda totalmente determinada y ya no tenemos libertad para hacer que cumpla la segunda. Podemos solamente intentar ver si esta traslación también manda  $z_2$  en  $z'_2$ . Si lo hace, bien; si no, el problema no tiene solución.

Podemos precisar la condición que nos garantice resolver el problema: la única traslación  $T$  que manda  $z_1$  en  $z'_1$  es  $T(z) = z + (z'_1 - z_1)$ . Que ésta mande  $z_2$  en  $z'_2$  quiere decir que:

$$z'_2 = T(z_2) = z_2 + z'_1 - z_1,$$

lo que equivale a  $z'_2 - z_2 = z'_1 - z_1$ .

Geométricamente esto es obvio: para que una traslación lleve  $z_1$  en  $z'_1$  y  $z_2$  en  $z'_2$  es necesario (y suficiente) que los vectores de  $z_1$  a  $z_2$  y de  $z'_1$  a  $z'_2$  sean iguales:



Si queremos mandar dos puntos en otros dos puntos dados necesitamos un grupo de transformaciones mayor que el de las traslaciones. Veremos que siempre lo podemos hacer mediante transformaciones afines:

Queremos mandar una pareja de puntos distintos en otra. ¿Qué libertad tenemos para hacerlo?

$$\{z_1, z_2\} \rightarrow \{z'_1, z'_2\}$$

Podríamos primero trasladar todo el plano al origen (mandando el punto  $z_1$  al 0) , luego giramos y expandemos (o contraemos) y luego nos regresamos al punto  $z'_1$ .

Sean

$$T(z) = z - z_1,$$

$$S(z) = \alpha z \text{ con } \alpha = \frac{z'_2 - z'_1}{z_2 - z_1},$$

$$R(z) = z + z'_1.$$

$$\text{Componiendo } \varphi(z) = R(S(T(z))) = (\alpha(z - z_1)) + z'_1 = \frac{z'_2 - z'_1}{z_2 - z_1} z + \frac{z'_1 z_2 - z_1 z'_2}{z_2 - z_1} = \alpha z + \beta$$

También podemos encontrar  $\alpha$  y  $\beta$  resolviendo el siguiente sistema:

$$\varphi(z_1) = \alpha z_1 + \beta = z'_1$$

$$\varphi(z_2) = \alpha z_2 + \beta = z'_2$$

$$\alpha(z_2 - z_1) = z'_2 - z'_1$$

$$\alpha = \frac{z'_2 - z'_1}{z_2 - z_1}$$

$$\beta = z'_1 - \alpha z_1 = \frac{z'_1 z_2 - z_1 z'_2}{z_2 - z_1}$$



Pero otra manera más elegante de verlo, que incluso muestra la unicidad de la transformación es primero mandar  $\{z_1, z_2\}$  en  $\{0, 1\}$  y  $\{z'_1, z'_2\}$  en  $\{0, 1\}$ , mediante las transformaciones  $T_1(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$  y  $T_2(z) = \frac{z-z'_1}{z'_2-z'_1}$ :

Entonces  $T = T_2^{-1} \circ T_1$  manda la pareja  $\{z_1, z_2\}$  en  $\{z'_1, z'_2\}$ .

Si se tiene una transformación  $S(z) = \alpha z + \beta$  que manda  $\{0, 1\}$  en  $\{0, 1\}$  ésta tiene que ser la identidad, pues si  $S(0) = \alpha \cdot 0 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$ , entonces  $S(z) = \alpha z$  pero  $S(1) = \alpha \cdot 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$ , por tanto  $S(z) = z$ .

De aquí concluimos que  $T(z)$  es única en general, porque si hubiera dos transformaciones diferentes, componiéndolas con  $T_1^{-1}$  y  $T_2$  habría dos diferentes que mandan  $\{0, 1\}$  en  $\{0, 1\}$ .

**Conclusión 2.1** *Existe una única transformación afín que manda una pareja de puntos distintos en otra.*

¿Cuándo podremos mandar una terna de puntos distintos en otra?

Ya tenemos la transformación que manda una pareja en otra:

$T$  manda  $\{z_2, z_3\}$  en  $\{z'_2, z'_3\}$ .

tenemos que  $z_1^* = T(z_1)$ , éste número tiene que ser igual a  $z'_1$ , si fueran iguales ya no tendríamos que pedir nada, pero resulta que no siempre ocurre, por lo que se necesita pedir que sean iguales;

Por tanto tenemos:

**Teorema 2.3** *Existe una transformación afín, que manda  $z_1, z_2, z_3$  en  $z'_1, z'_2, z'_3$  si y sólo si*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z'_1 - z'_2}{z'_3 - z'_2}$$

Veamos cuál es la geometría del asunto:

Esta razón,  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ , es un número complejo que caracteriza al triángulo, el que nos va a dar información de la proporción de sus lados y el ángulo entre ellos:

$\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \arg(z_1 - z_2) - \arg(z_3 - z_2)$  que es el ángulo señalado por la flecha

$\left|\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_3 - z_2|}$  es la razón entre los lados adyacentes.

Entonces esta relación

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z'_1 - z'_2}{z'_3 - z'_2},$$

quiere decir que los triángulos formados por las ternas son semejantes, a su vez esto quiere decir que la transformación afín preserva la razón.

Toda la geometría de semejanza se puede escribir en términos de complejos (geometría afín)

(Ver apéndice C)

¿Cuándo tres puntos están alineados?

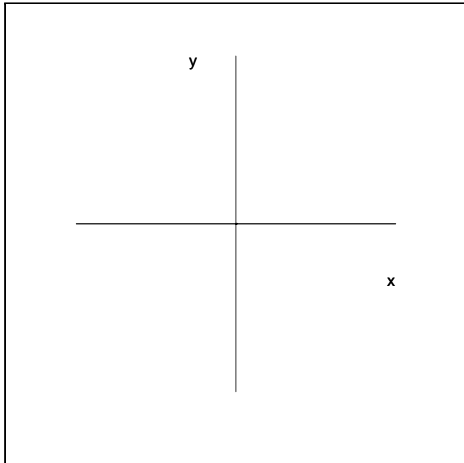
cuando el  $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \pi$  ó  $0$

y esto ocurre cuando  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$  es un número real,

Así toda transformación afín manda puntos alineados en puntos alineados.

¿Cuándo un triángulo es triángulo rectángulo?

cuando  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = ir$  con  $r \in \mathbb{R}$



Otro ejemplo sería la ecuación de una recta,

$$\frac{z - z_2}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z - z_2}{z_3 - z_2} = \overline{\frac{z - z_2}{z_3 - z_2}}$$

o la ecuación de un círculo,

$$\left| \frac{z - z_2}{z_3 - z_2} \right| = 1, \text{ es decir, } |z - z_2| = |z_3 - z_2|.$$

## 2.2. Transformaciones de Möbius

### 2.2.1. Inversión

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

Tenemos que 0 va al  $\infty$  y  $\infty$  va al 0.

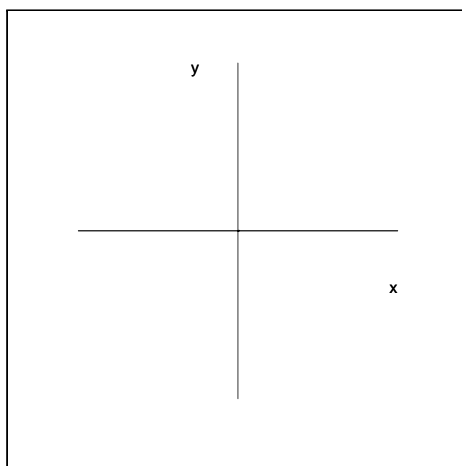
A cada número complejo  $\neq 0$  le corresponde su inverso:

$$f(z) = \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Esta transformación manda todo lo que está dentro del círculo unitario ( $|z| < 1$ ) a todo lo que está fuera de él ( $|f(z)| > 1$ ) y viceversa.

Consideremos la circunferencia unitaria:

En geometría moderna se define la inversión como sigue: si dos puntos  $p$  y  $p'$  colineales con el centro de la circunferencia de radio 1, cumplen con que el producto de sus distancias al centro es igual uno, entonces  $p$  y  $p'$  son puntos inversos. ( $d(0, p)d(0, p') = 1$ ). Se demuestra que la inversión tiene muchas propiedades muy interesantes, como por ejemplo, la preservación de los ángulos en magnitud, pero invierte su orientación.



Entonces la inversión de la geometría moderna se puede escribir en notación compleja como  $z \rightarrow (1/\bar{z})$ . La inversión compleja sería la inversión usual seguida de la conjugación. Observemos cómo el reflejar con respecto al eje real, nos recupera la orientación original de los ángulos.

Las transformaciones que hemos visto (afines) mandan rectas en rectas y círculos en círculos, a diferencia de  $f(z) = \frac{1}{z}$ , con la cual un círculo o una recta va a dar a un círculo o una recta, es decir, no siempre círculos van a dar a círculos. Veámoslo:

círculo:

$$|z - z_0| = r,$$

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2,$$

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0.$$

Hacemos  $b = -z_0$ ,  $c = z_0\bar{z}_0 - r^2$  y obtenemos una ecuación general:

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \quad a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$$

Aquí están todas las rectas y todos los círculos. (Ver Apéndice C)

Si  $a \neq 0$  y  $b\bar{b} - ac > 0$  tenemos un círculo con centro  $-\frac{b}{a}$  y radio  $r = \sqrt{\frac{b\bar{b} - ac}{a^2}}$ .

Si  $a = 0$  la ecuación representa una recta cualquiera,  $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ .

$$f(z) = \frac{1}{z} = w,$$

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0,$$

$$a\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} + \bar{b}\frac{1}{w} + b\frac{1}{\bar{w}} + c = 0,$$

$$cw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + a = 0,$$

$$a'w\bar{w} + \bar{b}'w + b'\bar{w} + c' = 0,$$

donde  $a' = c$ ,

$$b' = \bar{b},$$

$$c' = a,$$

Entonces tenemos que:

Un círculo que pasa por el origen ( $c = 0$ ) va a una recta  $\cup \{\infty\}$  que no pasa por el origen ( $a' = 0$ ).

Un círculo que no pasa por el origen va a otro círculo que no pasa por el origen.

Una recta que pasa por el origen ( $a$  y  $c = 0$ ), va a una recta que también pasa por el origen.

Una recta que no pasa por el origen ( $a = 0, c \neq 0$ ), va a un círculo que pasa por el origen.

Ahora si pensamos a una recta como un círculo de radio  $\infty$  entonces estaríamos hablando sólo de círculos, por tanto con esta modalidad tendríamos que

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ manda "círculos" en "círculos"}$$

Como transformación  $\frac{1}{z}$  no está definida en  $z = 0$ , pero no es muy difícil corregir esta situación: si agregamos a  $\mathbb{C}$  un punto al  $\infty$  podemos definir  $f(0) = \infty$  y  $f(\infty) = 0$ .

Veamos qué significa esto geoméricamente.

### 2.2.2. La esfera de Riemann

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

$$\pi : S - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$$

A casi todo punto de la esfera le asociamos un punto en el plano:

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Podemos agregar el punto al infinito y que sea el punto imagen de  $(0, 0, 1)$  y obtener una extensión de la función  $\pi$  al plano extendido.  $\pi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$

La transformación adquiere un sentido geométrico claro, si se identifica  $z = x_1 + ix_2$  con el punto  $(x_1, x_2, 0)$ . Entonces  $\pi(p)$  va a ser el punto de intersección de el plano  $(x_1, x_2)$  con la recta en  $\mathbb{R}^3$  que sale del punto  $(0, 0, 1)$  y pasa por el punto  $p$  (ver dibujo).

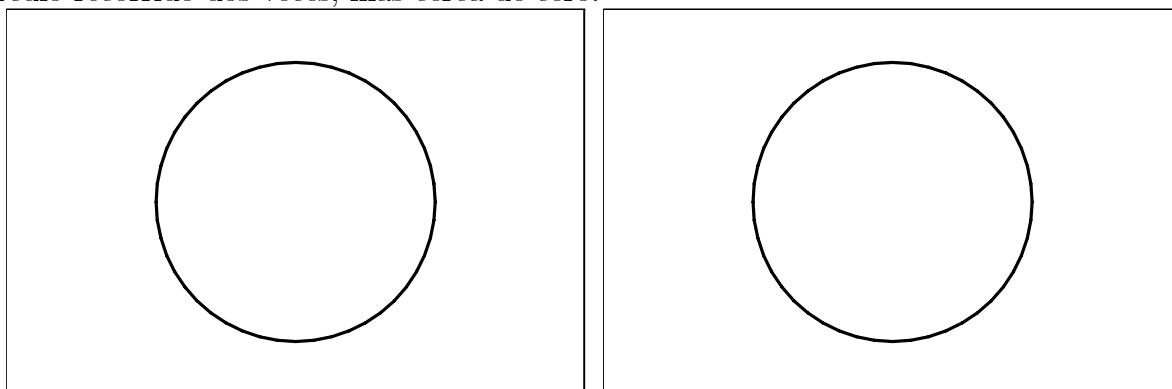
La función  $\pi$  es llamada la *proyección estereográfica*, con  $\pi(0, 0, 1) = \infty$ . Como se trata de una función biyectiva, podemos hallar su inversa  $\pi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S$

$$\pi^{-1}(z) = \left( \frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

$\pi$  es continua y su inversa también lo es, en el sentido de que si  $z \rightarrow (0, 0, 1)$ , entonces  $\pi(z) \rightarrow \infty$  y viceversa, a lo que se le llama un homeomorfismo. Es decir que desde un punto de vista topológico la esfera y el plano extendido son equivalentes.

Esto resulta muy útil, pues es una manera de representar al plano complejo extendido y visualizar las funciones  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  (polinomios, cociente de polinomios,  $\frac{1}{z}$ , transformaciones afines, etc)

Por ejemplo  $f(z) = z^2$ . Esta función  $z^2$  mandará a la esfera dos veces sobre sí misma y se estira hacia el polo sur y hacia el polo norte: Un círculo paralelo al ecuador cerca de  $\infty$  va a otro círculo recorrido dos veces, más cerca de  $\infty$ . El círculo unitario (ecuador) va al ecuador recorrido dos veces. Un círculo paralelo al ecuador cerca del cero va a otro círculo recorrido dos veces, más cerca de cero.



### 2.2.3. Transformaciones de Möbius

Agregando la inversión a las transformaciones afines tenemos transformaciones de  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ con } ad - bc \neq 0$$

las que se llaman de Möbius en honor del matemático alemán A.F. Möbius (1790-1868). También se les llama transformaciones lineales fraccionarias. Asimismo, se trata de cocientes de polinomios de grado uno, por lo que son a la vez funciones racionales.

Cuando  $ad - bc = 0$ , el numerador es múltiplo del denominador por una constante y  $f(z)$  es constante, por eso las excluimos.

Si  $c = 0$  entonces  $a \neq 0$ , esto implica que  $f(z) = \alpha z + \beta$  con  $\alpha = \frac{a}{d}$  y  $\beta = \frac{b}{d}$  y  $f(\infty) = \infty$ , es decir tenemos las transformaciones afines.

Si  $c \neq 0$ , tenemos que  $f(-\frac{d}{c}) = \infty$  y cuando nos movemos hacia el  $\infty$ , la transformación de Möbius tiende al valor  $\frac{a}{c}$ , es decir  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{a}{c}$ .

Lo que tenemos es una transformación de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  biyectiva, por tanto podemos encontrar su inversa que va

a ser de la misma forma.

**Ejemplo 2.1**  $T(z) = \frac{iz+1}{z-1}$

$$T(1) = \infty$$

$$T(\infty) = i$$

Todos los círculos que pasan por el 1 van a rectas que no pasan por  $i$ .

Todas las rectas que pasan por 1 (círculos de radio  $\infty$ ) van a rectas que pasan por  $i$ .

Todo lo que pasa por  $i$  viene del  $\infty$ , por lo que las rectas van a círculos que pasan por  $i$ .

Otra manera de pensar esto, es con la proyección estereográfica, las rectas en el plano van a dar a círculos que pasan por el polo norte y los círculos del plano van a dar a círculos que no pasan por el polo norte, es decir, los círculos van a dar a círculos.

Una transformación de Möbius también la podemos representar mediante una matriz compleja de dos por dos  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  invertible. Y al revés, dada cualquier matriz que cumpla la condición  $\det A = ad - cb \neq 0$ , podemos asociarle una transformación de Möbius. Esta correspondencia (a pesar de que no es biyectiva, porque una matriz  $A$  y cualquiera de sus múltiples escalares  $\lambda A$  definen la misma transformación de Möbius) tiene la ventaja de que permite usar las operaciones con matrices para encontrar composiciones e inversas de transformaciones de Möbius.

Consideremos dos conjuntos:

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \text{traslaciones, rotaciones, homotecias, } \frac{1}{z} \text{ y todas sus composiciones} \right\}$$

$$\mathcal{M} = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - cb \neq 0 \right\} \quad (\text{conjunto de las transformaciones de Möbius})$$

Vamos a demostrar que el conjunto de transformaciones de Möbius forma un grupo bajo la composición. (Este se denota por  $GL(2, \widehat{\mathbb{C}})$  módulo una homotecia  $\lambda$ ).

**Proposición 2.1**  $\mathcal{M}$  es un grupo de transformaciones de  $\widehat{\mathbb{C}}$

**Demostración 1)** Si  $T, T' \in \mathcal{M}$  entonces  $T \circ T' \in \mathcal{M}$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad T'(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

$$T(T'(z)) = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')z + ab' + bd'}{(ca'+dc')z + cb' + dd'}$$

la forma corresponde a una transformación de Möbius, pero faltaría demostrar que  $(aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') \neq 0$

Esto se puede hacer directamente, pero es mejor hacerlo con matrices:

$$T(T'(z)) = \frac{a''z+b''}{c''z+d''} \quad \text{donde } a'' = (aa' + bc')$$

$$b'' = (ab' + bd')$$

$$c'' = (ca' + dc')$$

$$d'' = (cb' + dd').$$

Luego, la composición de transformaciones de Möbius se corresponde con el producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Como el determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes, tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \neq 0 \text{ y}$$

por tanto  $T \circ T' \in \mathcal{M}$ .

2) Si  $T \in \mathcal{M}$  entonces  $T^{-1} \in \mathcal{M}$ . Es decir que existe la inversa y ésta pertenece a  $\mathcal{M}$ .

Si  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , podemos encontrar explícitamente la función inversa  $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ ; esta función es de la forma deseada. También podemos encontrarla calculando la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , aunque no es necesario incluir el factor constante dado por el determinante.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$T(T^{-1}(z)) = \frac{(ad-bc)z+0}{0z+(ad-bc)} = z$$

Así, tenemos que  $\mathcal{M} = \{T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, \text{ con } ad-bc \neq 0\}$  es un grupo de transformaciones de  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . ✓ ■

### Teorema 2.4 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$

**Demostración** i)  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$  : como todas las transformaciones afines están en  $\mathcal{M}$  ( $\alpha z + \beta = \frac{\alpha z + \beta}{0z + 1}$ ), y la inversión está en  $\mathcal{M}$  ( $\frac{1}{z} = \frac{0z + 1}{1z + 0}$ ), también están todas sus composiciones, porque  $\mathcal{M}$  es cerrado bajo composición. ✓

ii)  $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}$  : Ahora hay que demostrar que toda transformación de Möbius se puede obtener como composición de homotecias, rotaciones, traslaciones y la inversión.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Si  $c = 0$ , esto es fácil:  $T$  es una transformación afín,  $T(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , y es composición de una homotecia, una rotación y una traslación.

Veamos que al componer con una inversión (y un poco más) podemos reducir las cosas al caso  $c = 0$  :

Que  $c \neq 0$ , significa que  $T$  no es afín, es decir que  $T(\infty) \neq \infty$  :  $T(\infty) = \frac{a}{c}$ . Pero podemos mandar de regreso este punto al infinito mediante una traslación  $T_1(z) = z - \frac{a}{c}$  (que lo manda al cero), seguida de la inversión  $S(z) = \frac{1}{z}$  que manda 0 al  $\infty$ .

Luego la composición  $S \circ T_1 \circ T = T'$  manda  $\infty$  en  $\infty$ , es afín, y por el caso  $c = 0$  sabemos que es composición de una homotecia, una rotación, una traslación. Luego  $T = T_1^{-1} \circ S^{-1} \circ T'$  es también composición de homotecias, rotaciones, traslaciones e inversión. ✓ ■

**Ejercicio 2.1** Basándose en la demostración anterior, escribir explícitamente  $T$  como composición de homotecias, rotaciones, traslaciones e inversión. Comparar el resultado con lo que aparece en el libro de Ahlfors.



## 2.2.4. Invariancia de círculos, ángulos y razón cruzada.

De lo anterior, podemos ya asegurar que: Toda transformación de Möbius manda círculos en círculos.

¡En efecto, ya sabemos que todas las transformaciones afines y la inversión mandan círculos en círculos, y que cualquier transformación de Möbius es composición de éstas!✓

Otra manera de verlo es, como en el caso de la inversión, substituyendo  $z = T(w)$  en la ecuación de un círculo, para ver que se obtiene la ecuación de otro círculo.

Veremos otra demostración de esto y de que además se preservan los ángulos entre los círculos, en base a entender, como lo hicimos antes con las traslaciones y las afines, cuándo podemos mandar un conjunto de puntos en otro mediante una transformación de Möbius.

**Teorema 2.5** Dadas  $\{z_1, z_2, z_3\}$ ,  $\{z'_1, z'_2, z'_3\}$  dos ternas de puntos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , existe una única  $T \in \mathcal{M}$  tal que  $T(z_1) = z'_1$ ,  $T(z_2) = z'_2$ ,  $T(z_3) = z'_3$

(Nota: ¡Compara con las transformaciones afines! Ahora tenemos un grupo mayor de transformaciones y podemos hacer más cosas que antes).

**Demostación** Podemos escribir las ecuaciones  $T(z_i) = z'_i$  y encontrar los coeficientes de  $T$ . Pero es más claro ver un caso particular, y reducir el caso general a éste utilizando las propiedades de grupo.

Queremos encontrar una transformación de Möbius que mande  $\{z_1, z_2, z_3\}$  en  $\{0, 1, \infty\}$ .

Con  $\eta(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$  mandamos a  $z_1$  al 0 y a  $z_3$  al  $\infty$ ,

y para que suceda que  $z_2$  va al 1, habría que buscar quién es  $k$  en  $\eta(z) = k \frac{z - z_1}{z - z_3}$ ,

$$1 = k \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3},$$

por lo que la transformación buscada es  $\eta(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$

$$\eta(z_1) = 0, \eta(z_2) = 1, \eta(z_3) = \infty.$$

La transformación que manda la terna  $\{z'_1, z'_2, z'_3\}$  en  $\{0, 1, \infty\}$  es:

$$\eta'(z) = \frac{z - z'_1}{z - z'_3} \frac{z'_2 - z'_3}{z'_2 - z'_1}.$$

Por tanto, por las propiedades de grupo de  $\mathcal{M}$ , tenemos que  $T(z_i) = (\eta')^{-1} \circ \eta(z_i) = z'_i$ .

*Unicidad:*

Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos transformaciones de Möbius que mandan la terna  $\{z_1, z_2, z_3\}$  en  $\{z'_1, z'_2, z'_3\}$ .

Nosotros queremos demostrar que  $T_1 = T_2$ .

Si la transformación que manda a  $\{0, 1, \infty\}$  es única no hay problema, pues si  $\eta' \circ T_1$  y  $\eta' \circ T_2 : \{z_1, z_2, z_3\} \rightarrow \{0, 1, \infty\}$  entonces  $T_1 = T_2$ .

Tomemos  $(\eta)^{-1} : \{0, 1, \infty\} \rightarrow \{z_1, z_2, z_3\}$ ,

así tenemos que:

$$\eta' \circ T_1 \circ (\eta)^{-1} : \{0, 1, \infty\} \rightarrow \{0, 1, \infty\},$$

$$\eta' \circ T_2 \circ (\eta)^{-1} : \{0, 1, \infty\} \rightarrow \{0, 1, \infty\}.$$

Probemos que  $\eta' \circ T_1 \circ \eta^{-1}$  es la identidad.

Tenemos que  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  manda a  $\{0, 1, \infty\}$  en  $\{0, 1, \infty\}$ ,

$$f(0) = \frac{b}{d} \text{ por tanto } b = 0,$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ por tanto } c = 0,$$

$$\text{y } f(1) = \frac{a}{d} \text{ por tanto } a = d.$$

Y si  $\infty$  va a  $\infty$ , es de la forma  $\alpha z + \beta$ ; y si el 0 va al 0 entonces  $\beta = 0$ ;

$$f(1) = \alpha 1 = 1 \text{ entonces } \alpha = 1.$$

Por tanto  $\eta' \circ T_1 \circ \eta^{-1} = I$  (Identidad) de aquí se concluye que  $T_1 = T_2$ . ✓ ■

Ahora, si tenemos cuatro puntos distintos  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  y queremos mandarlos a otros cuatro puntos distintos  $\{z'_1, z'_2, z'_3, z'_4\}$ , ¿lo podremos hacer?

En general no se puede. De acuerdo con el teorema anterior, podemos mandar tres puntos distintos en otra terna de puntos,  $T(z_i) = z'_i$ . La imagen del cuarto punto bajo la transformación  $T$ ,  $T(z_4) = z_4^*$ , no necesariamente es igual al punto que queremos  $z'_4$ . Entonces hay que pedir que sean iguales  $\eta(z_4)$  y  $\eta'(z'_4)$ . Es decir, se tiene que cumplir

$$\text{que } \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{z'_4 - z'_1}{z'_4 - z'_3} \frac{z'_2 - z'_3}{z'_2 - z'_1}.$$

Por tanto tenemos:

**Teorema 2.6** *Dados  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  y  $\{z'_1, z'_2, z'_3, z'_4\}$  existe una única transformación de Möbius que manda  $z_i$  en  $z'_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  si y sólo si  $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{z'_4 - z'_1}{z'_4 - z'_3} \frac{z'_2 - z'_3}{z'_2 - z'_1}$ .*

### Razón Cruzada (RC)

Sea  $S(z) = \frac{z - z_2}{z - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$ , esta transformación manda a  $\{z_2, z_3, z_4\}$  en  $\{0, 1, \infty\}$ , respectivamente.

Al valor  $S(z_1) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$  se le llama **razón cruzada** y se denota  $RC(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ,

$$RC(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4}}{\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}} \text{ razón de razones,}$$

si alguno de los puntos  $z_2, z_3, z_4$  es igual a  $\infty$ , la razón es simple:

$$\frac{z_3 - z_4}{z - z_4}, \frac{z - z_2}{z - z_4} \text{ y } \frac{z - z_2}{z_3 - z_2} \text{ respectivamente.}$$

**Teorema 2.7** *Toda transformación de Möbius  $T$  preserva la razón cruzada.*

**Demostración** Sea  $S(z) = \frac{z - z_2}{z - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$ .

Al considerar la transformación  $S \circ T^{-1}$ , los puntos  $\{T(z_2), T(z_3), T(z_4)\}$  van a  $\{0, 1, \infty\}$ .

Entonces la razón cruzada de  $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = S(T^{-1}(T(z_1)))$ .

$$S(T^{-1}(T(z_1))) = S(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

por tanto  $T$  preserva la razón cruzada. ✓ ■

Si cuatro puntos están en círculo ¿ Cómo podemos expresarlo en función de la razón cruzada?

Si mandamos tres en  $0, 1, \infty$  el cuarto punto tiene que estar en el eje real.

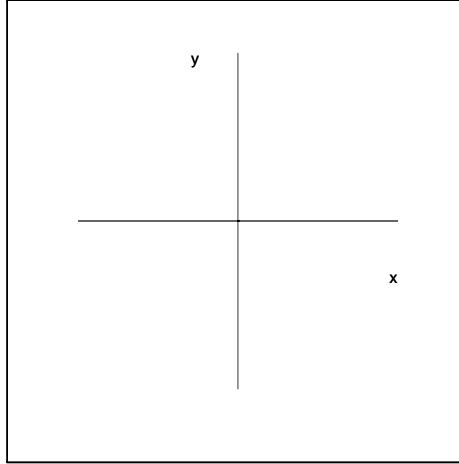
Si  $z_1, z_2, z_3, z_4$  están en un círculo si y sólo si  $RC(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}}{\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}} \in \mathbb{R} \text{ esto implica que } \arg\left(\frac{\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}}{\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}}\right) = 0 \text{ ó } \pi$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4}\right) + \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \pi.$$

En la figura son los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico.

Y si están en una recta los cuatro puntos también la razón cruzada es real.



Una demostración analítica es la siguiente:

$$RC(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - z_2}{z - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} = \frac{z - z_2}{z - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z} - \bar{z}_4} \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_4}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}$$

$$\Leftrightarrow (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_4)(z_3 - z_4)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) = (z - z_4)(\bar{z} - \bar{z}_2)(z_3 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4)$$

$$\Leftrightarrow (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_4)w_0 = (z - z_4)(\bar{z} - \bar{z}_2)v_0$$

$$\bar{v}_0 = w_0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}(w_0 - v_0) + z(\bar{z}_2(v_0) - \bar{z}_4(w_0)) + \bar{z}(z_4(v_0) - z_2(w_0)) + (z_2\bar{z}_4(w_0) - z_4\bar{z}_2(v_0)) = 0$$

que es la ecuación general de un círculo (o de una recta).

Por lo que si tomamos tres puntos  $z_1, z_2, z_3$  que definan un círculo, entonces cualquier transformación de Möbius manda el punto  $z$  en otro punto del círculo definido por  $T(z_2), T(z_3), T(z_4)$ .

Por todo lo anterior tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.8** *Toda transformación de Möbius manda círculos en círculos.*

Cualquier propiedad que se pueda expresar en términos de la razón cruzada resulta ser invariante, por ejemplo la preservación de ángulos orientados.

Tomemos dos círculos  $C$  y  $C'$  que se corten en dos puntos  $z_1$  y  $z_2$ .

Escogemos dos puntos  $z_0$  en  $C$  y  $z'_0$  en  $C'$

Afirmamos que  $\sphericalangle(C C') = \arg(RC(z'_0, z_1, z_0, z_2))$ .

Observemos en el dibujo que :

1)  $\alpha = 2\beta$  y  $\alpha' = 2\beta' \Rightarrow \alpha = 2 \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right)$  y  $\alpha' = 2 \arg\left(\frac{z_1 - z'_0}{z_2 - z'_0}\right)$ .

2)  $\theta + \sigma = \frac{\pi}{2}$  y  $\theta + \sigma' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi - 2\theta = 2\sigma$ .

3) Del triángulo formado por  $0, 0'$  y  $z_1$  tenemos  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} + \theta + 2\sigma = \pi$ ,

por tanto  $\theta = \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) + \arg\left(\frac{z_1 - z'_0}{z_2 - z'_0}\right)$ , o bien

$$\sphericalangle(C C') = \arg\left(\frac{z'_0 - z_1}{z'_0 - z_2} \cdot \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1}\right) = \arg(RC(z'_0, z_1, z_0, z_2)).$$

En el caso de dos rectas :

Si  $z_2 = \infty$ , la razón es simple:  $RC(z'_0, z_1, z_0, z_2) = \frac{z'_0 - z_1}{z_0 - z_1}$ .

**Ejercicio 2.2** Dejamos al lector, demostrar el caso del ángulo entre una recta y un círculo.

Otra demostración más sencilla consiste en reducir el caso general al caso de dos rectas, mandando un punto de intersección al  $\infty$  (Ver el libro de Ahlfors).

**Teorema 2.9** Toda transformación de Möbius preserva ángulos (orientados)

**Conclusión 2.2** Las transformaciones de Möbius son un grupo de transformaciones que van de  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , que preservan razón cruzada, mandan círculos en círculos y preservan ángulos orientados.

Para ver la relación con la geometría hiperbólica, ver apéndice E.

## 2.2.5. Introducción a las funciones Racionales

Las transformaciones de Möbius son un caso particular de las funciones racionales.

Una función racional es un cociente de polinomios,  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  donde  $P, Q$  no tienen raíces comunes.

Los ceros de  $Q(z)$  son los polos de  $R$ . En estos puntos, definimos  $R$  como  $\infty$ .

Los ceros de  $P(z)$  son los ceros de  $R$ .

El grado de  $R$  se define como el  $\max\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}$ . Más adelante veremos que el grado tiene que ver con el número de preimágenes de un punto  $w$ , es decir cuántos puntos  $z$  van a dar al valor  $w$ . Por ejemplo, si tenemos  $z^3$  y  $\frac{1}{z^3}$ , son funciones racionales de grado 3. Todo punto  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  tiene tres preimágenes en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . De esta manera el grado tiene que involucrar tanto al denominador como al numerador.

¿A dónde va el  $\infty$ ?

Tenemos un cociente de funciones tales que tienden a infinito cuando  $z \rightarrow \infty$ , aquí lo importante es ver que tan rápido se van, quién es el que domina y los grados nos proporcionarán información:

Sean

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$$

$$Q(z) = b_m z^m + \dots + b_0$$

Si  $n > m$ ,  $P$  tiende a  $\infty$  más rápido que  $Q$  y  $R$  tiende a  $\infty$ . Si  $n < m$ , es al revés, y  $R$  tiende a 0. Para precisar estos argumentos podemos escribir

$$R(z) = z^{n-m} \frac{a_n + \dots + a_0 z^{-n}}{b_m + \dots + b_0 z^{-m}}$$

El cociente tiende a  $\frac{a_n}{b_m}$  cuando  $z$  tiende a  $\infty$ .

Luego  $R(z) \rightarrow \infty$  si  $n > m$ ,  $R(z) \rightarrow 0$  si  $n < m$  y  $R(z) \rightarrow \frac{a_n}{b_m}$  si  $n = m$ . Así podemos definir  $R(\infty)$  como sigue:

si  $n > m$  entonces  $R(\infty) = \infty$

si  $n < m$  entonces  $R(\infty) = 0$

si  $n = m$  entonces  $R(\infty) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0, \infty$

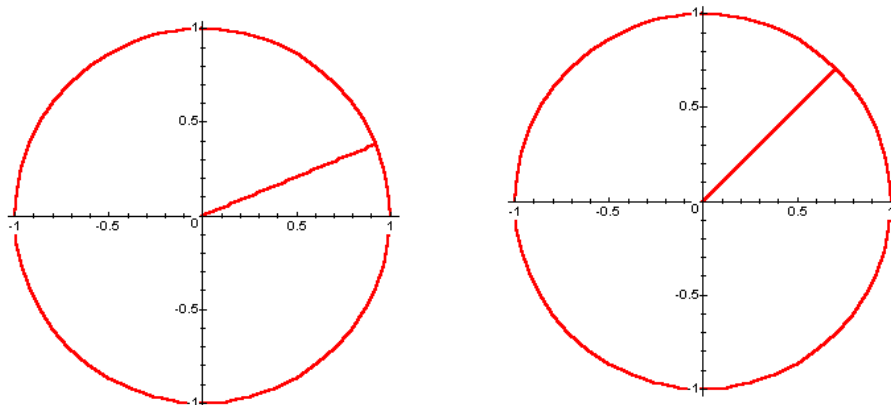
Por tanto tenemos que son funciones de  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  bien definidas y ¡CONTINUAS!

## 2.3. Análisis geométrico

### 2.3.1. $z^2$ como transformación del plano. Duplicación y preservación de ángulos

$f(z) = z^2$ . El cero va a dar al cero. El círculo unitario va a dar al círculo unitario recorrido dos veces.

Cuando hemos recorrido apenas  $\pi$  en el plano  $z$ , en el plano  $w$  ya recorrimos todo el círculo.



$z_1 = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  y  $-z_1 = \cos(\theta + \pi) + i \operatorname{sen}(\theta + \pi)$  van a dar al mismo punto (aquí la función no es inyectiva).

Un círculo de radio  $r < 1$  va en otro círculo de radio  $r^2 < r$  y recorrido dos veces.

Un círculo de radio  $r > 1$  va en otro círculo de radio  $r^2 > r$  y recorrido dos veces.

Ahora consideremos la función  $f(z) = z^2 + c$ , o bien  $f(z) = az^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

La primera podría pensarse como  $z^2$  y luego una traslación de valor  $c$ ; y la segunda como  $z^2$ , luego una rotación y homotecia y al final trasladamos un valor  $c$ .

Recordemos cómo le hacíamos en el caso real, ¿cómo entendíamos un polinomio de grado dos?

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

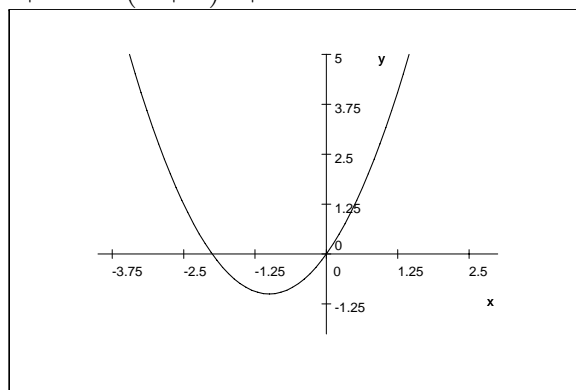
¿Cómo sabíamos que es una parábola?

Completando cuadrados:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a} = \left( \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Si  $a > 0$ ,  $-\frac{b}{2a}$  es la abcisa del punto en donde se dobla la recta. Haciendo el cambio de variable  $x' = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$  obtenemos la expresión de una parábola  $x'^2 + b'$ , doblada en otro punto y subida o bajada un valor  $b'$ .

**Ejemplo 2.2**  $P(x) = x^2 + 2x = (x + 1)^2 + 1$



Ahora si hacemos lo mismo para el caso en  $\mathbb{C}$  :

$$p(z) = z^2 + bz + c = z^2 + bz + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4} = \left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

Vemos que aquí también tenemos un punto especial, cuando teníamos  $z^2$ , el cero tiene sólo una preimagen (los puntos en el plano- $z$  que van a dar a un punto  $w$ ) y todos los demás tienen dos preimágenes diferentes. Aquí el punto especial es  $z = -\frac{b}{2}$  y los puntos simétricos con respecto al punto especial que van a dar al mismo valor son:  $-\frac{b}{2} + u, -\frac{b}{2} - u$

Lo mismo que ocurre con  $z^2$  en torno al origen, aquí ocurre en torno al punto  $-\frac{b}{2}$ .

Con un cambio de variable  $z' = z + \frac{b}{2}$ ,

$z'^2 + \text{"algo"}$  = hacer  $z^2$  y luego trasladar un valor

Como composición tendríamos:

Un círculo con centro en  $-\frac{b}{2}$  va a dar a un círculo con centro en el origen y luego va a dar a otro círculo con centro en el origen pero recorrido dos veces y luego lo trasladamos un valor  $c - \frac{b^2}{4}$  (el origen va a dar al punto  $c - \frac{b^2}{4}$ ).

Se ve mejor si no dibujamos los ejes. Tengo un punto y los círculos alrededor de él van a dar a otros alrededor del otro punto:

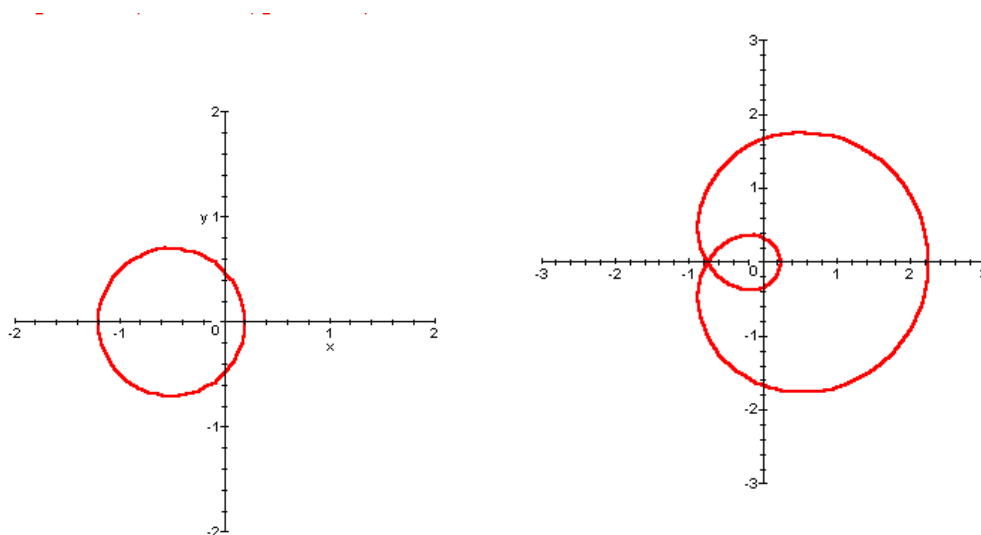
Así en general  $(z - z_0)^2 + c$ , cada círculo alrededor de  $z_0$ , lo manda a otro círculo alrededor del punto  $\alpha$  recorrido dos veces.

Si multiplicamos la función por un valor  $\gamma \neq 0$ ,  $g(z) = \gamma((z - z_0)^2 + c)$ , todo lo que

teníamos lo giramos y lo expandemos (o contraemos). En resumen, si entendemos cómo es la transformación  $z^2$  podemos saber cómo es la de cualquier otro polinomio de segundo grado.

Volviendo a  $z^2$ , la imagen bajo  $z^2$  de un círculo con centro en el origen (no consideremos el radio), es otro círculo recorrido dos veces, pero dibujado en el plano- $w$  lo vemos como un solo círculo, no se distingue la segunda vuelta.

¿Qué pasaría si metemos una pequeña variación? ¿Qué pasa si tomamos un círculo cuyo centro está ligeramente desplazado del origen?



Si seguimos los puntos de este círculo observamos lo siguiente:

Si consideramos la parte del círculo que está en el primer cuadrante, el argumento del punto  $z$  varía de  $0$  a  $\frac{\pi}{2}$  y la elevamos al cuadrado, el argumento del punto  $z^2$  varía de  $0$  a  $\pi$  quedándonos una curva como un pedazo de círculo; y al recorrer la parte II, la curva imagen da una vuelta alrededor del origen, por tanto si vamos recorriendo las demás partes de los cuadrantes (III, IV), obtenemos que la curva imagen es una curva cerrada que da dos vueltas alrededor del  $0$  y tiene una forma como de un “arete”.

Vemos así que  $z^2$  no manda en general círculos en círculos.

**Ejercicio 2.3** *Ver qué pasa cuando vamos alejando el centro del círculo del origen.*

Y finalmente las rectas que pasan por el origen van a dar a rayos con el doble de ángulo de la recta original



Podemos concluir que una malla de este tipo:

bajo  $z^2$  sería otra malla del mismo tipo, la diferencia es que los círculos están recorridos dos veces (expandidos o contraídos) y las rectas que pasan por el origen son realmente rayos que salen del cero.

Los ejes (real e imaginario) se doblan como sigue:

El eje real va al eje real positivo.

El eje imaginario va al eje real negativo.

La imagen inversa de un círculo (con centro en el origen) y una recta que pase por el origen, es un círculo y dos rectas respectivamente.

Ahora veamos la imagen de una malla así:

$z$

Tenemos que en coordenadas  $x, y$  la transformación se escribe:

$$(x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy)$$

Tomemos un punto  $(a, b)$ . La imagen de la recta horizontal  $(t, b)$  que pasa por este punto queda parametrizada por  $\gamma_1(t) = (t^2 - b^2, 2tb)$ .

Es fácil ver que la imagen es una parábola: si  $u = t^2 - b^2$  y  $v = 2tb$ , eliminando  $t$  obtenemos la ecuación  $u = v^2/4b^2 - b^2$ .

La imagen de la recta vertical  $(a, t)$  también es una parábola, parametrizada por  $\gamma_2(t) = (a^2 - t^2, 2at)$ .

Y la imagen son parábolas cruzadas:

$$z^2$$

¿Cómo se cruzan estas parábolas?

El ángulo entre ellas será el ángulo entre sus vectores tangentes en el punto  $f(a, b)$ .

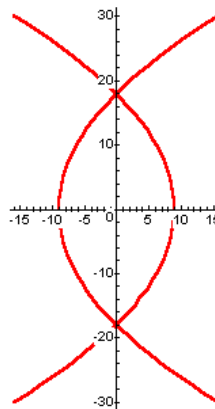
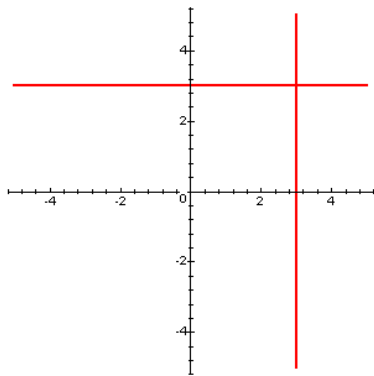
Calculando:

$$\gamma_1'(t) = (2t, 2b)$$

$$\gamma_2'(t) = (-2t, 2a)$$

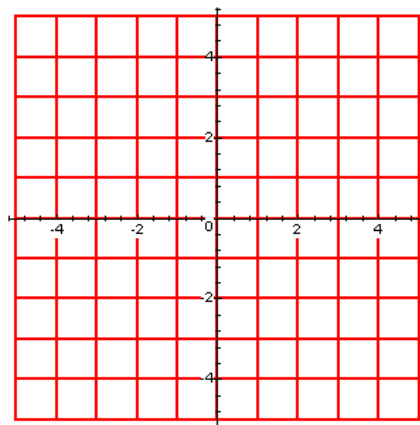
$$\gamma_1'(a) = (2a, 2b), \gamma_2'(b) = (-2b, 2a)$$

por tanto las curvas imagen se cortan ortogonalmente.



Podemos también entender cómo se ve la transformación viendo la imagen inversa de algunas curvas.

¿Qué familia de curvas bajo  $z^2$  van a dar a la siguiente malla?



Buscamos la imagen inversa de la malla de rectas horizontales y verticales:

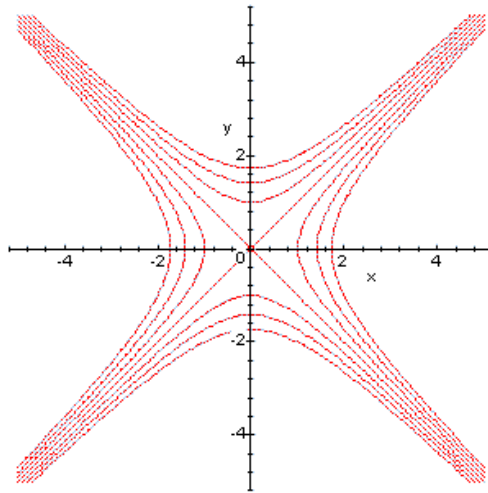
Para las rectas verticales:

$c > 0$  :

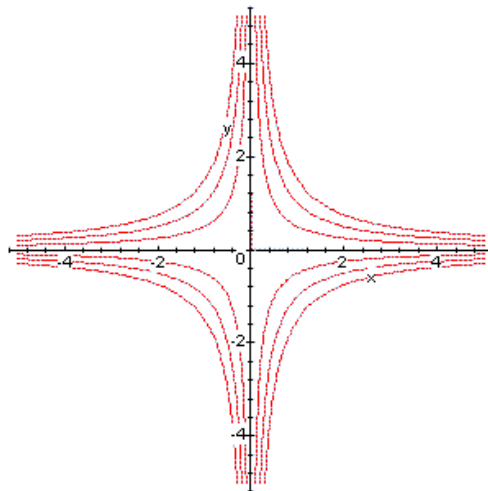
$x^2 - y^2 = c$  aquí tenemos hipérbolas con asíntotas en las rectas  $y = \pm x$

$c < 0$  :

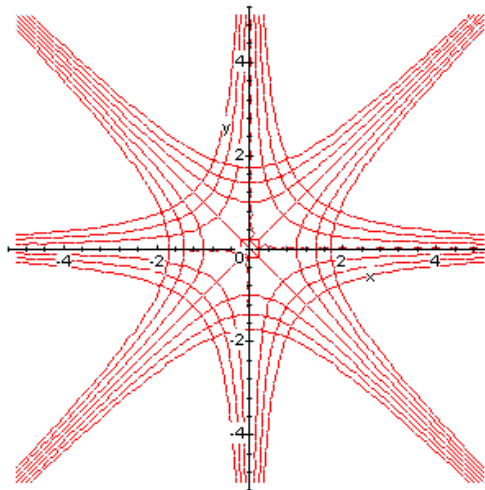
$y^2 - x^2 = c$  obtenemos las hipérbolas conjugadas



Para las rectas horizontales:  
 $2xy = c$  tenemos hipérbolas con asíntotas en los ejes coordenados y que son ortogonales a las otras hipérbolas.



por tanto la imagen inversa de la malla queda así:



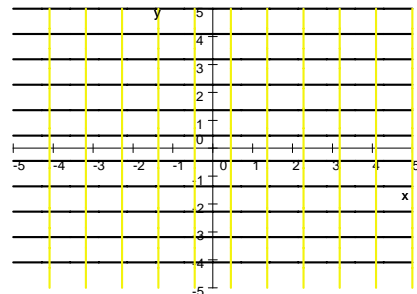
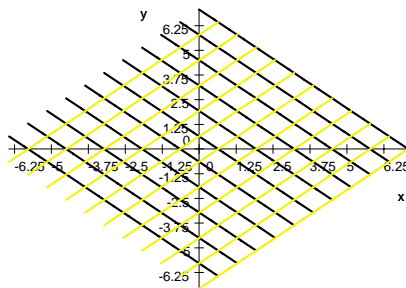
Dos familias de hipérbolas. Para ver el ángulo entre ellas tomemos el ángulo entre sus vectores normales. Para las hipérbolas de ecuación  $2xy = c$ , los vectores normales están dados por el gradiente de  $2xy$  que es  $(2y, 2x)$ . Para las de ecuación  $x^2 - y^2 = c$  el vector normal es  $(2x, -2y)$ . Como estos vectores son ortogonales, las hipérbolas son ortogonales en cada punto de intersección.

Si tuviéramos inclinada la malla de rectas ¿Cuál sería su imagen directa bajo  $z^2$ ?

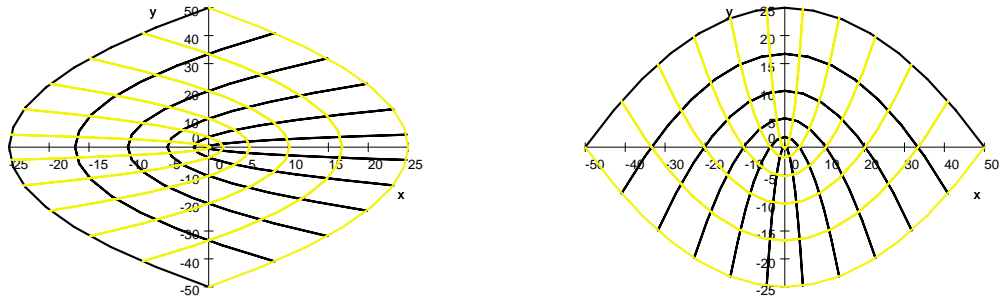
Se podría parametrizar las curvas e ir viendo su imagen o bien podemos utilizar lo que ya hemos hecho. Si la malla está inclinada, con un giro podemos "enderezarla" y elevar al cuadrado obtenemos las parábolas, volvemos a girar las parábolas con otro ángulo para obtener la imagen de la malla inclinada.

Es decir,  $z \rightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)z \rightarrow (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)z^2 \rightarrow z^2$ .

Giramos un ángulo  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,



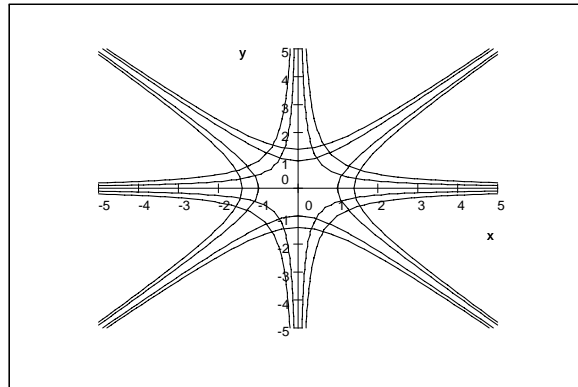
elevamos al cuadrado y giramos un ángulo  $-\frac{\pi}{2} = -2\theta$  :



Así obtenemos las parábolas inclinadas. Lo que hemos demostrado es que cualquier malla de rectas (horizontales-verticales) bajo  $z^2$  nos la manda a otra malla pero de parábolas.

Algo similar ocurre si tomamos la imagen inversa de una malla de rectas inclinadas, que será una familia de hipérbolas inclinadas.

Si el ángulo de la malla "inclinada" es  $\theta$ , giramos las hipérbolas un ángulo  $-\frac{\theta}{2}$ , multiplicándolas por un valor  $\beta$  donde  $\arg(\beta) = -\frac{\theta}{2}$



luego elevamos al cuadrado para obtener la malla de rectas horizontales-verticales y al final multiplicamos por otro valor  $\alpha$ , donde  $\arg(\alpha) = \theta$  para obtener la malla inclinada.

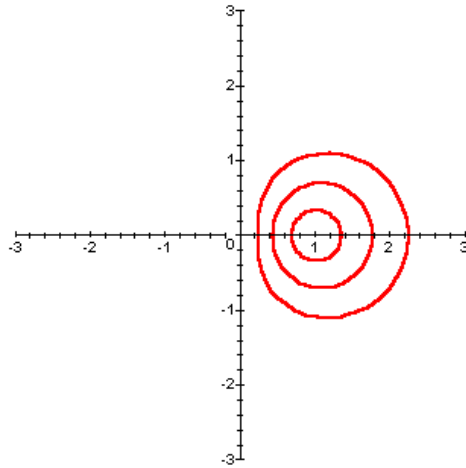
Lo que esencialmente estamos haciendo es  $z^2$  :

$$z \rightarrow \beta z \rightarrow (\beta z)^2 \rightarrow \alpha (\beta z)^2 \text{ por lo que si } \beta = \sqrt{\alpha^{-1}},$$

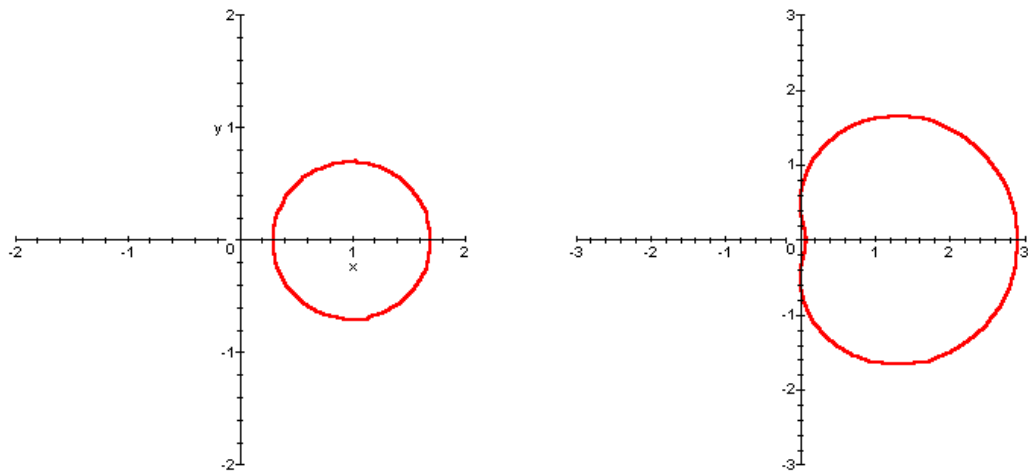
$$\left(\sqrt{\alpha^{-1}}z\right)^2 = \alpha^{-1}z^2$$

$$\alpha(\alpha^{-1}z^2) = z^2.$$

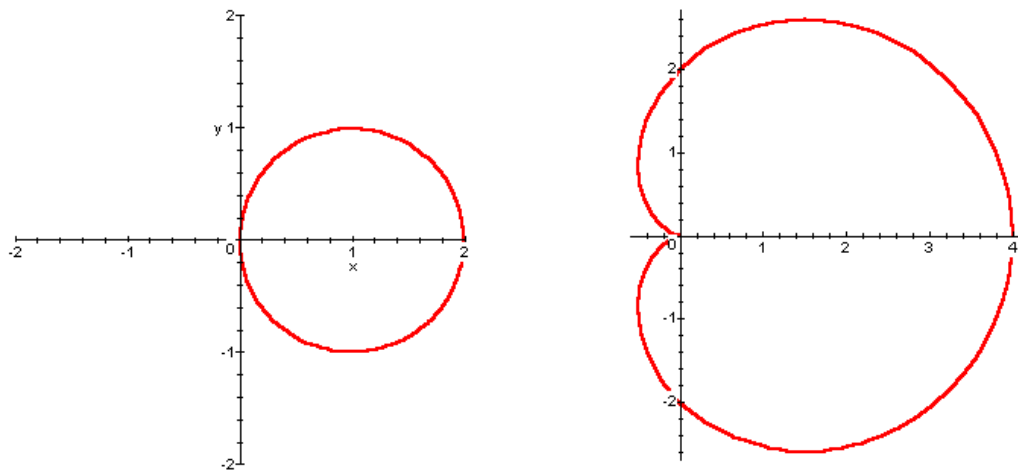
Ahora si tenemos círculos centrados en  $(1, 0)$  y radio  $r$  menor que uno, las imágenes serán curvitas alrededor del 1, que se van a ir pareciendo a un "cacahuete":



Quando el círculo sea tangente a las rectas de pendiente  $\pm 1$ , los argumentos del círculo variarán de  $\frac{\pi}{4}$  a  $-\frac{\pi}{4}$  que al duplicarlos la imagen quedará entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $-\frac{\pi}{2}$  y el módulo de  $z$  más pequeño es menor que 1 ( $\neq 0$ ) y el más grande mayor que 1, por lo tanto los módulos de las imágenes variarán de un valor muy cerca del cero a un valor mayor que 1, quedando una curva imagen así:

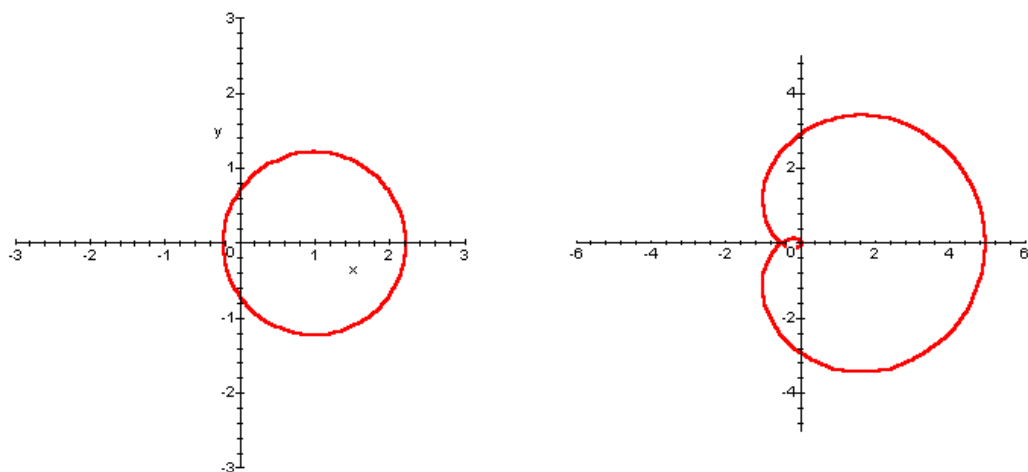


La imagen de un círculo con centro en  $(1, 0)$  y radio 1 bajo  $z^2$ , es la cardioide:



Es importante observar que cuando pasamos por el cero, la curva imagen no es una curva lisa, sino que tiene un "pico".

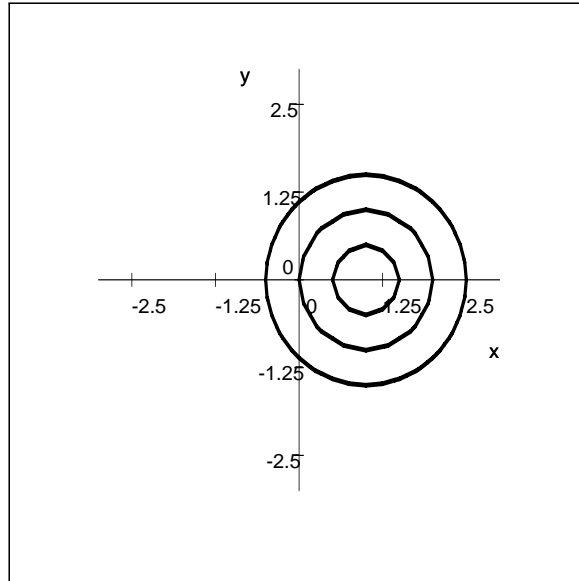
La imagen de un círculo con centro en  $(1, 0)$  y radio un poco mayor que 1 bajo  $z^2$ , es una curva que le da ya dos vueltas al cero y es como decíamos de tipo "arete":



Hay un cambio cualitativo cuando pasamos por el punto  $z = 0$ , empezamos en la imagen con curvas casi círculos, se van deformando continuamente, todas dando una vuelta hasta llegar a dar dos vueltas. Es decir que el punto especial es el cero.

Ahora consideremos una malla de círculos concéntricos de radio  $k$  con centro en otro punto distinto del cero, por ejemplo  $z = 1$  :





Buscamos la imagen inversa de los círculos con centro en 1, es decir:

$$\{z : |z^2 - 1| = k\} = \{z : |z - 1| |z - (-1)| = k\}.$$

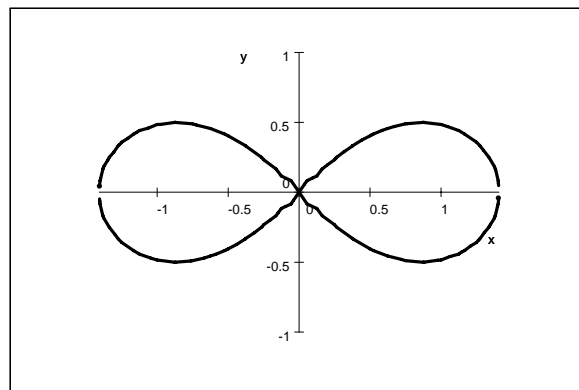
Buscamos los puntos  $z$  cuyo producto de las distancias al 1 y al  $-1$  es constante.

La familia de curvas que buscamos son las curvas de nivel de la superficie definida por  $f(z) = |z^2 - 1|$ .

Si  $k = 0$ , es claro que los puntos  $z = 1$  y  $z = -1$  satisfacen  $|z^2 - 1| = 0$ . O bien los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$ .

Si  $k = 1$ , tenemos la curva Lemniscata:

desarrollando  $|z^2 - 1| = 1$  encontramos  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ , que si lo expresamos en coordenadas polares tenemos  $r^2 = 2 \cos 2\theta$  :

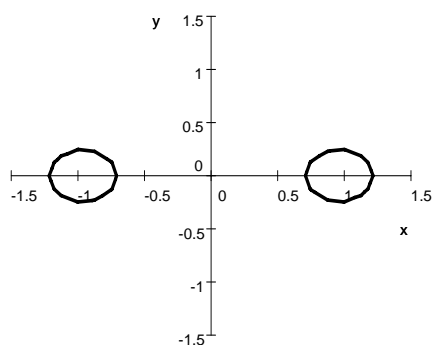


Lemniscata

Al elevar al cuadrado la parte de la curva que está en el primer cuadrante, tenemos el semicírculo y cuando recorremos el segundo cuadrante obtenemos el círculo. Terminamos de recorrer la Lemniscata y obtenemos otra vuelta del círculo.

Cuando  $k$  es pequeña menor que 1 tenemos dos curvitas (casi círculos) alrededor del

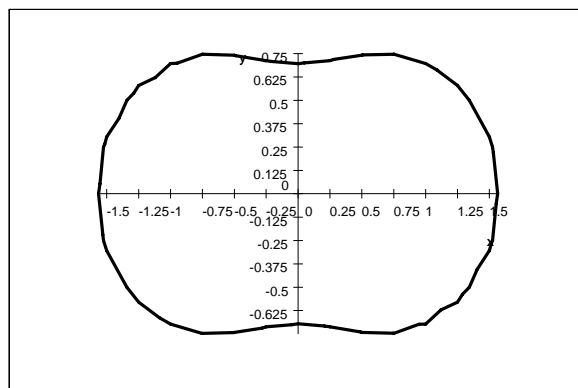
1, -1.



$$k < 1$$

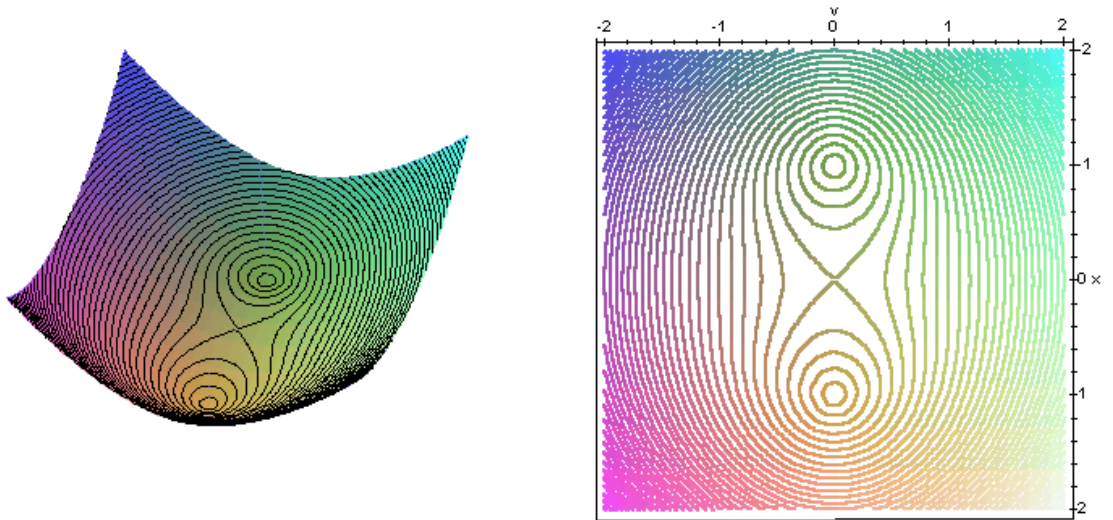
Observemos que el argumento de los puntos  $z$  en la curva alrededor del  $-1$ , varían alrededor de  $\pi$  y que al elevarlos al cuadrado su argumento estará variando alrededor de  $2\pi$ . Cuando el valor de  $k$  va tendiendo a 1, las curvas van teniendo la forma de un "huevo".

Si  $k > 1$ , tenemos una curva como la siguiente:

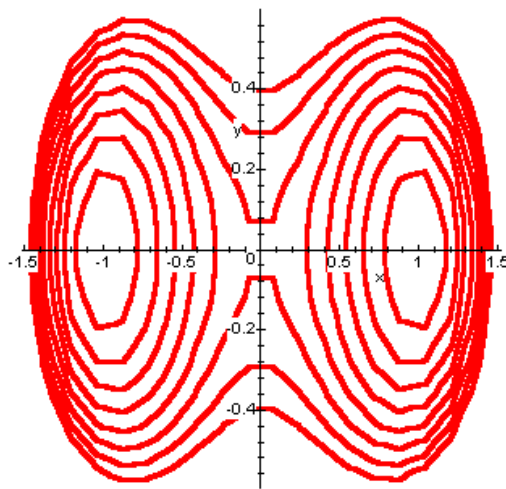


Si el valor de  $k$  es cada vez más grande, la imagen inversa se va ir pareciendo cada vez más a un círculo.

En las siguientes figuras vemos la superficie  $f(z) = |z^2 - 1|$  y las curvas de nivel:



Entonces esta familia de curvas que llenan el plano, se llaman “Curvas de Cassini”<sup>1</sup>. Al aplicarles  $z^2$  nos da la familia de círculos con centro en el uno y radio  $k$  (que también llenan el plano).



Curvas de Cassini

**Ejercicio 2.4** *Encontrar la imagen directa e inversa de las rectas que pasan por  $z = 1$ , completando así las dos familias de curvas a una malla ortogonal.*

---

<sup>1</sup>Introducidas por el astrónomo italiano-frncés Jean-Dominique Cassini (1625-1712)

Hemos visto que la transformación  $z^2$  preserva ángulos entre muchas curvas que se cruzan fuera del origen. ¿Será esto cierto en general?

Para demostrarlo recordemos qué pasa con los vectores tangentes bajo una transformación.

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y tenemos una curva  $\gamma(t)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Su imagen es la curva  $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ . El vector tangente a esta curva es  $\sigma'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ .

donde  $Df(\gamma(t))$  es la derivada de  $f$  en el punto  $\gamma(t)$ , es decir, la transformación lineal dada por la matriz jacobiana de  $f = (f_1, f_2)$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En el caso de  $z^2$ ,  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  y la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

que, para  $(x, y) \neq 0$ , es una matriz que preserva ángulos, como vimos en el capítulo uno. Luego queda demostrado que  $z^2$  preserva siempre ángulos entre curvas.

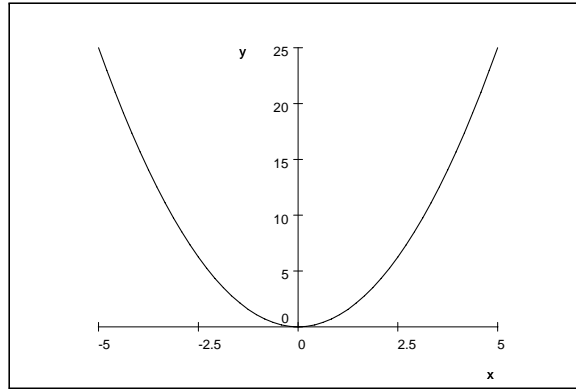
**Ejercicio 2.5** *Obsérvese que la matriz jacobiana anterior es la que corresponde al complejo  $2z$ .*

*¿Qué relación hay entre esta función y la transformación  $z^2$ ?*

### 2.3.2. Raíz cuadrada. Otras potencias y raíces.

¿Qué es  $\sqrt{z}$ ?

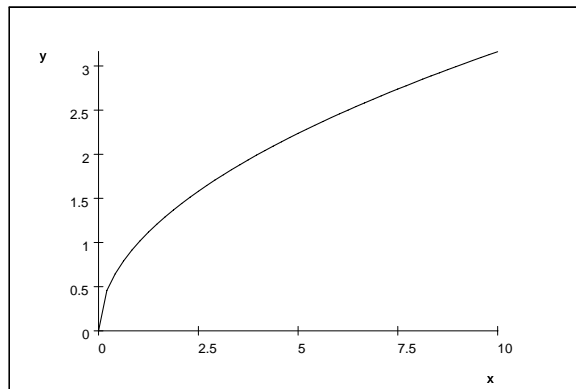
Recordemos qué teníamos en  $\mathbb{R}$  :



Dado un valor de  $y$  existen dos raíces y tenemos que escoger una. Existe una manera de escogerla, que es tomar la positiva.

$$\sqrt{x} = \begin{cases} \text{raíz cuadrada no negativa,} & x \geq 0 \\ \text{nada,} & x < 0 \end{cases}$$

y esta función es derivable casi en todos los puntos:



Ahora en  $\mathbb{C}$ : sabemos que  $z_1, -z_1$  al elevarlos al cuadrado van a un punto  $w$ .

¿Bajo qué criterio escogemos una raíz ?

Consideremos el  $-1$ .

Un primer intento es:

Definición:

Al punto  $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  le asociamos  $r^{1/2}(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2})$  donde  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Con ésta definición tenemos ya problemas, porque al tomar una sucesión en el semiplano superior que converga al  $-1$ , la función tiende al valor  $i$ , pero al tomar otra sucesión en el semiplano inferior, los valores de la función tienden al valor  $-i$ . La función resulta no continua en todo el eje real negativo.

El problema no está tanto en la definición sino que si tomamos un punto cualquiera  $w$  y lo movemos continuamente, por ejemplo por un círculo alrededor del origen, entonces en la imagen empezamos en el punto  $z_1$  y terminamos en  $-z_1$  (el punto opuesto). Lo que estamos haciendo es ir sacando la mitad del ángulo.

**Conclusión 2.3** *No existe una función  $f(w)$  tal que*

- 1) Esté bien definida para toda  $w \in \mathbb{C}$
- 2) Sea continua
- 3) Cumpla  $f(w)^2 = w$

Entonces ¿Qué podemos hacer con la función multivaluada?

Definir  $f(w)$  = la raíz con parte real positiva y escoger un dominio  $U = \mathbb{C} - \{\text{eje real negativo}\}$ , esto es una rama continua de  $\sqrt{w}$ . También podemos definir otras ramas.

La elección del dominio puede ser cualquier región quitándole “algo” para no darle la vuelta al cero:

Esto también es válido para cualquier función algebraica:  $(w)^{\frac{1}{n}}$ .

**Ejemplo 2.3**  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  buscamos una región donde se pueda definir.

$\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z - 1}\sqrt{z + 1}$ . ¿Dónde vale cero  $z^2 - 1$ ?

Si tomamos  $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$  como dominio, esta bien definida la raíz.

O bien  $\mathbb{C} - \{-1, 1\}$  Por que al tomar un valor y le damos la vuelta a las dos raíces, cambia el signo de  $\sqrt{z - 1}\sqrt{z + 1}$  y llegamos al mismo valor.

Más en general  $\sqrt{p(z)}$ , buscamos sus raíces y evitamos darles la vuelta. Podemos tener regiones así:

### 2.3.3. Polinomios y funciones Racionales

Sea  $p(z) = az^n$

Mas adelante veremos que la derivada es el  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(z+h) - p(z)}{h}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Dado que

$$\frac{p(z+h) - p(z)}{h} = \frac{a(z+h)^n - az^n}{h} = anz^{n-1} + h(R(h, z)),$$

donde  $R(h, z)$  es continua, y tomando el límite tenemos que:

$$p'(z) = anz^{n-1}.$$

La matriz jacobiana que obtuvimos de ver a  $z^2$  como función de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tiene que ver con la derivada de  $z^2$ :

$$\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \rightarrow (2x + i2y) = 2(x + iy) = 2z$$

Si vemos a  $z^3$  como función de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3),$$

la Matriz jacobiana es:

$$\begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -3 \times 2xy \\ 3 \times 2xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix} \rightarrow 3z^2$$

Esto también es válido para  $z^n$ . Veamos.

Supongamos por inducción que: se vale para  $z^n$ , es decir:

$$z^n = (A_n(x, y), B_n(x, y)),$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_n}{\partial x} & \frac{\partial A_n}{\partial y} \\ \frac{\partial B_n}{\partial x} & \frac{\partial B_n}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow nz^{n-1} = (z^n)',$$

queremos ver que se vale para  $n + 1$ :

$$z^{n+1} = z^n z = (A_n + iB_n)(x + iy) = (xA_n - yB_n) + i(B_nx + A_ny)$$

sacamos la matriz jacobiana:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x \frac{\partial A_n}{\partial x} + A_n - y \frac{\partial B_n}{\partial x} & x \frac{\partial A_n}{\partial y} - y \frac{\partial B_n}{\partial y} - B_n \\ y \frac{\partial A_n}{\partial x} + B_n + x \frac{\partial B_n}{\partial x} & y \frac{\partial A_n}{\partial y} + A_n + \frac{\partial B_n}{\partial y} x \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A_n}{\partial x} & \frac{\partial A_n}{\partial y} \\ \frac{\partial B_n}{\partial x} & \frac{\partial B_n}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_n & -B_n \\ B_n & A_n \end{bmatrix} \rightarrow znz^{n-1} + z^n \\ & = nz^n + z^n = (n+1)z^n = (z^{n+1})'. \end{aligned}$$

Si tengo  $az^n$ , no hay más que hacer, se puede pensar que primero se eleva a la  $n$  y

después de multiplicar por una constante y tendríamos que se sigue cumpliendo que:

$$a \begin{bmatrix} \frac{\partial A_n}{\partial x} & \frac{\partial A_n}{\partial y} \\ \frac{\partial B_n}{\partial x} & \frac{\partial B_n}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow anz^{n-1} = (az^n)'$$

Así hemos demostrado el siguiente

**Teorema 2.10** Si  $p(z) = az^n$  es un polinomio complejo entonces

i)  $p'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(z+h) - p(z)}{h}$  existe para  $\forall z \in \mathbb{C}$

ii) Si consideramos a  $p$  como función de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la matriz jacobiana de  $p$  es igual a la matriz asociada al complejo  $p'(z)$ .

En resumen:

Si  $p'(z) \neq 0$ :

- a) tenemos que la matriz asociada a la transformación (vista de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) es  $\mathbb{C}$ -lineal
- b) tenemos que el determinante es  $\neq 0$ , lo que la hace invertible localmente, es decir, existe una vecindad de  $z_0$  que el polinomio manda en forma uno a uno en otra vecindad alrededor de  $f(z_0)$ . Intuitivamente podemos decir que un pedacito de plano no lo arruga ni lo dobla sino que lo manda a otro pedacito del plano.

### Puntos críticos:

Ahora nos preguntamos qué pasa en los puntos donde la derivada se hace cero. ¿Cómo se comporta el polinomio?

Empecemos con un ejemplo:

$$p(z) = z^2 + z^3 = z^2(1 + z)$$

$$p'(z) = 2z + 3z^2$$

$$p'(0) = 0 \text{ (el cero es punto crítico)}$$

el comportamiento del módulo es:

$$|p(z)| = |z^2(1 + z)| = |z|^2 |1 + z|$$

y el comportamiento del argumento es:

$$\arg(p(z)) = \arg(z^2(1 + z)) = \arg(z^2) + \arg(1 + z) = 2 \arg z + \arg(1 + z)$$

Es decir, para  $z$  cercano a 0 el módulo de  $p(z)$  es *casi* el módulo de  $z$  al cuadrado y el argumento de  $p(z)$  es *casi* 2 veces el argumento de  $z$ . El factor  $(1 + z)$  está “perturbando” poco el factor  $z^2$ .

Veamos cómo es la imagen de un círculo de radio  $\varepsilon$  centrado en el origen:

Sea  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , fijo.

Tenemos que,

$$z = \varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

por tanto

$\gamma(\theta) = p(\varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta)) = \varepsilon^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)(1 + \varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta))$ , es la parametrización de la curva -imagen. Esta curva se obtiene de multiplicar el circulito de radio  $\varepsilon^2$  recorrido dos veces y el círculo de radio  $\varepsilon$  con centro en  $z = 1$ . El módulo de  $1 + z$  varía entre  $1 - \varepsilon$



y  $1 + \varepsilon$  y su argumento varía entre  $-\arcsin \varepsilon \leq \arg(1 + z) \leq \arcsin \varepsilon$ , la variación de este ángulo es pequeña, como estamos tomando  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ,  $\arg(1 + z) \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ .

Como  $\gamma(0) = \varepsilon^2(1 + \varepsilon) = \gamma(2\pi)$ , tenemos que la curva es cerrada.

Llamemos  $\varphi = \arg(1 + \varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta))$ .

A cada valor de  $\theta$  le corresponde el valor de  $2\theta + \varphi$ , ésta función continua manda el intervalo  $[0, \pi]$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y el intervalo  $[\pi, 2\pi]$  en  $[2\pi, 4\pi]$ .

Observemos que:

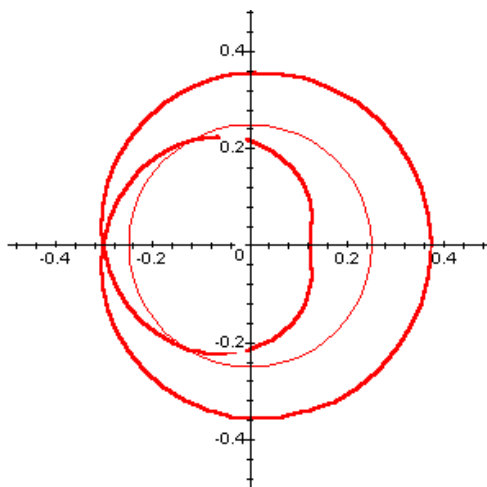
$\varepsilon < 1 - \varepsilon < 1$ , entonces  $\varphi < \pi - \theta$ .

Por tanto  $2\theta + \varphi < \pi + \theta < 2\pi$ , si  $\theta \in (0, \pi)$ .

Entonces si  $\theta \in [0, \pi]$ , la curva le da una vuelta alrededor del origen pero sin cerrarse pues  $\gamma(0) = \varepsilon^2(1 + \varepsilon)$  y  $\gamma(\pi) = \varepsilon^2(1 - \varepsilon)$  y cuando  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ , la curva da otra vuelta y se cierra, llegando al valor  $\varepsilon^2(1 + \varepsilon)$ .

Además  $|\gamma(\theta)| \in [\varepsilon^2(1 - \varepsilon), \varepsilon^2(1 + \varepsilon)]$ . Obsérvese que la velocidad con que se recorre la curva no es constante.

La curva imagen queda así:



Intuitivamente si tomamos círculos cada vez más pequeños "llenando" la vecindad del

cero, las imágenes son estas curvas, por lo que una vecindad del cero va a otra “vecindad encimada” como “doble-encimadita”, más adelante precisaremos esto. Lo interesante de este comportamiento es que para el caso más general, para un polinomio de grado  $n$ , también se cumple.

Factorizando el polinomio de esta forma  $p(z) = z^*(1 + z^*)$  podemos analizarlo localmente.

Nos preguntamos ¿Qué sucede en la imagen de un punto  $z_0$  bajo el polinomio?

Sea

$$z = z_0 + h,$$

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0,$$

$$p(z) = p(z_0 + h) = a_n (z_0 + h)^n + \dots + a_1 (z_0 + h) + a_0 = a_n z_0^n + \dots + a_n h^n + \dots + a_1 z_0 + a_1 h + a_0,$$

$$p(z_0) = a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0,$$

$$p(z_0 + h) - p(z_0) = b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n,$$

$$p(z_0 + h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n \text{ donde si } h = 0, p(z_0) = b_0.$$

¿Cómo son los coeficientes de este polinomio en  $h$  ?

$$\frac{P(z_0+h)-P(z_0)}{h} = \frac{b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n}{h} = b_1 + b_2 h + \dots + b_n h^{n-1} \text{ cuando } h \rightarrow 0 \text{ tenemos que}$$

$$p'(z_0) = b_1$$

$$\frac{P'(z_0+h)-P'(z_0)}{h} = \frac{2b_2 h + \dots + n b_n h^{n-1}}{h} = 2b_2 + \dots + n b_n h^{n-2} \text{ cuando } h \rightarrow 0 \text{ tenemos que}$$

$$\frac{P''(z_0)}{2} = b_2$$

Así tenemos que para

$$p(z_0 + h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n, \text{ donde } \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} = b_k.$$

Con esto podemos hacer la siguiente formulación:

Si  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  es un polinomio en  $z$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$  entonces  $p(z_0 + h)$  es un polinomio en  $h$ .

Si  $h = (z - z_0)$ , entonces  $p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots + b_n(z - z_0)^n$  con  $\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} = b_k$

Algunas consecuencias de esto son:

- Siempre podemos escribir a  $p(z)$  en términos de potencias de  $(z - z_0)$
- $p(z)$  es divisible por  $(z - z_0) \Leftrightarrow p(z_0) = 0, p(z) = (z - z_0)Q(z)$ .
- $p(z)$  es divisible por  $(z - z_0)^k \Leftrightarrow p(z_0) = 0, p'(z_0) = p''(z_0) = \dots = p^{k-1}(z_0) = 0$ .

Ahora que hemos expresado los coeficientes, analicemos cómo se ve el polinomio cuando nos movemos en una vecindad de  $z_0$ .

$$p(z_0 + h) - p(z_0) = b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n.$$

Si  $b_1 \neq 0$ , es decir si la derivada es distinta de cero tenemos:

$p(z_0 + h) - p(z_0) = b_1h + b_2h^2 + \dots + b_nh^n = h(b_1 + b_2h + \dots + b_nh^{n-1})$  esto quiere decir que la vecindad de  $z_0$  se transforma en otra mediante una rotación y expansión (o contracción), el término que cuenta es  $hb_1$

Si  $b_1 = 0$ , esto es, la derivada vale cero en el punto  $z_0$  :

$b_k \neq 0 \Rightarrow \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0 \Rightarrow$  que el polinomio no es constante

$p(z_0 + h) - p(z_0) = b_kh^k + \dots + b_nh^n = h^k(b_k + b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k})$  cuando  $h$  es muy pequeña este factor  $b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k}$  es pequeño también y tendremos esencialmente  $h^kb_k$  y la vecindad de  $z_0$  va  $k$  veces en otra vecindad (casi circulito). Dicho de otra forma es  $k$  a 1.

Para precisar esto veamos que:

$$\begin{aligned} |p(z_0 + h) - p(z_0)| &= \\ |h^k(b_k + b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k})| &= |h|^k |b_k + b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k}| \\ \arg(p(z_0 + h) - p(z_0)) &= \arg(h^k(b_k + b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k})) = \\ k \arg h + \arg(b_k + b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k}) & \end{aligned}$$

$$|b_k + b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k}| = |b_k + \varphi(h)| = |b_k| \quad \text{donde } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \text{ y } \arg(b_k + b_{k+1}h + \dots + b_nh^{n-k}) = \arg(b_k + \varphi(h)) = \arg(b_k).$$

Cerca del punto  $z_0$  la imagen se parece al comportamiento de la función  $z^k$ .

Si nos movemos alrededor del punto  $z_0$ , la imagen también se mueve alrededor del punto  $p(z_0)$ , es decir, que recorre todos los valores del argumento dándole la vuelta a  $p(z_0)$ .

Intuitivamente tenemos que el polinomio manda abiertos en abiertos, no puede pasar algo así en la imagen:

Otra forma de verlo sería con el Teorema de la Función Inversa para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Si  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z$  con  $a_1 \neq 0$  y  $p(0) = 0$  ¿Cómo se comporta el polinomio alrededor del cero?

Sea  $p(z) = U + iV$

$$z = x + iy$$

$$a_1 = b + ic$$

$$U = x^n \dots + bx - cy$$

$$V = x^n \dots + cx + by$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \dots + b$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \dots - c$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \dots + c$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \dots + b$$

$$Dp(0) = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} = b^2 + c^2 = |a_1|^2 \neq 0$$

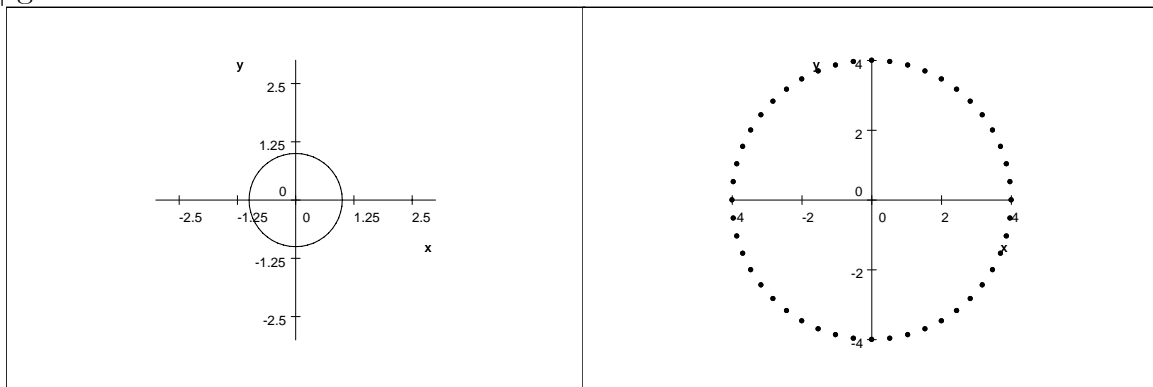
Por tanto existe la inversa en el punto, si tenemos un circulito alrededor del cero, la imagen será casi un circulito.

¿Qué pasa en el punto  $z_0 = \infty$  ?

$$p(z) = z^n(a_n + \dots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n}) \text{ con } a_n \neq 0, n \geq 1.$$

Lo que más va a contar es el término  $a_n z^n$ , si nos acercamos al punto  $z_0 = \infty$  el módulo del polinomio también tiende a  $\infty$ .

La imagen de un círculo de radio  $r$  suficientemente grande, dará  $n$  vueltas alrededor del cero, manteniéndose cerca del círculo de radio  $r^n \frac{|a_n|}{2}$ , pues  $\arg(p(z)) \approx n \arg z$  para  $|z|$  grande.



¿Cuántos puntos van a dar a  $\infty$ ?

Como  $p(\infty) = \infty$ , entonces hay uno, pero hay que contarlos  $n$  veces.

Para ver un poco más qué sucede en una vecindad del  $\infty$ , hagamos un cambio de variable y analicemos todo en el cero.

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

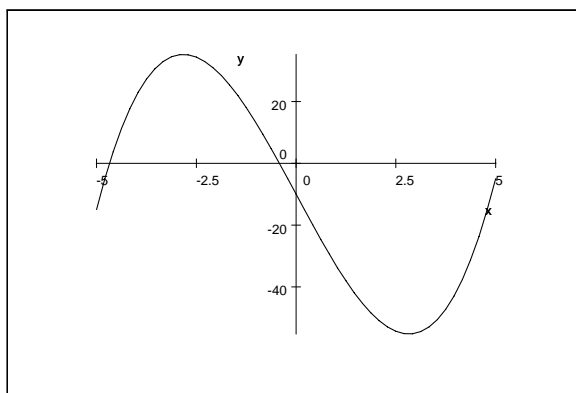
$$z = \frac{1}{\zeta}$$

$$\eta = \frac{1}{w} = \frac{1}{a_n \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n + \dots + a_0} = \frac{\zeta^n}{a_n + a_{n-1}\zeta + \dots + a_0 \zeta^n} = \zeta^n \left( \frac{1}{a_n + a_{n-1}\zeta + \dots + a_0 \zeta^n} \right) \sim \zeta^n \left( \frac{1}{a_n} \right)$$

Esto es, que el comportamiento cerca del  $\infty$  es casi el mismo que el del cero bajo  $z^n$ . Cuando estamos en el cero, bajo  $z^n$ , va a dar al cero. La vecindad del cero va a otra  $n$  veces, la multiplicidad del cero es  $n$ . Por lo tanto la multiplicidad del  $\infty$  es  $n$ .

**Conclusión 2.4** *A los puntos donde la derivada se hace cero, se les llama puntos críticos. Y vamos a tener  $2n - 2$  puntos críticos (también llamados de ramificación), los  $n - 1$  de la derivada más  $n - 1$  (por lo que cuenta el punto al  $\infty$ ). Y en los demás puntos el polinomio es localmente inyectivo.*

En el caso real tenemos que,



los puntos donde la función  $f(x)$  se dobla son los puntos donde la derivada se hace cero.

Los polinomios son funciones sobreyectivas de  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , y nos interesa saber, ¿cuántos puntos del plano- $z$  van a dar a un punto dado en el plano- $w$ ?. Es decir, ¿Cuántas preimágenes tiene un valor  $w$ ?

Si  $w \neq \infty$ , la ecuación  $p(z) - w = 0$  tiene  $n$  raíces y algunas pueden ser múltiples. Así tenemos que los polinomios son  $n$  a 1.

Si  $p(z_0) = w$ , pero  $p'(z_0) = 0$ ,  $p''(z_0) = 0$ , ...,  $p^{(k)}(z_0) \neq 0$  entonces  $z_0$  es una raíz de multiplicidad  $k$  de  $p(z) - w = 0$ , ésta hay que contarla  $k$  veces.

Si  $w = \infty$ , tenemos que  $p(\infty) = \infty$ , pero va  $n$  veces.

Por tanto, tenemos que todo punto  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  tiene  $n$  preimágenes distintas, salvo algunos puntitos por ahí, que ya sabemos cuáles son.

### **Funciones Racionales**

Sea un polinomio  $p(z)$  de grado  $n$ , y otro  $q(z)$  de grado  $m$ .

Definimos una función racional como un cociente de polinomios. Y también definimos el grado como el  $\max \{ \text{grado}(P), \text{grado}(Q) \}$ .

Veamos cómo el grado de la función racional tiene que implicar al denominador y al numerador.

Sea  $d = \max\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}$  el grado de una función racional  $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ . Dado un valor  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ , ¿cuántos puntos  $z$  van a dar a él?

Es decir, ¿cuántas raíces tiene la ecuación  $\frac{p(z)}{q(z)} = w$ ?

Tenemos que

$$\frac{p(z)}{q(z)} - w = \frac{p(z) - wq(z)}{q(z)}$$

Entonces ¿cuántas raíces tiene la ecuación  $p(z) - wq(z) = 0$  ?

Sea  $w \in \mathbb{C}$ .

Si el grado de la función racional  $d$  es igual a  $n$  entonces  $n > m$  y el grado de  $p(z) - wq(z)$  es  $n$ . Por tanto tenemos  $n$  soluciones.

Si  $d = m$  entonces  $n < m$  y el grado de  $p(z) - wq(z)$  es  $m$ , y tenemos  $m$  soluciones, salvo en el caso  $w = 0$ .

Si  $d = n = m$ , el grado de  $p(z) - wq(z)$  es de grado  $n = m$  y existen  $n$  soluciones, salvo en el caso  $w = \frac{a_n}{b_n}$ . El término de grado  $n$  de  $p(z) - wq(z)$  es igual a cero cuando  $w = \frac{a_n}{b_n}$ , y por tanto tenemos un polinomio de grado menor.

Analicemos los casos  $w = 0$ ,  $w = \infty$  y  $w = \frac{a_n}{b_n}$ .

Caso 1:

$w = 0$ . Si el grado es  $n$  y  $n \geq m$ , tenemos  $n$  soluciones en  $\mathbb{C}$ .

Si el grado de la función racional es  $m$ , ( $m > n$ ) entonces  $R(\infty) = 0$ . Vamos a tener  $n$  soluciones en  $\mathbb{C}$  y las demás están en el  $\infty$ .

Veamos, si hacemos un cambio de variable  $\xi = \frac{1}{z}$ :

$R\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{a_n\left(\frac{1}{\xi}\right)^n + \dots + a_0}{b_n\left(\frac{1}{\xi}\right)^n + \dots + b_0} = \xi^{m-n} \left( \frac{a_n + \dots + a_0 \xi^n}{b_n + \dots + b_0 \xi^m} \right)$ , cuando  $z \rightarrow \infty$ , tenemos  $\xi \rightarrow 0$  y  $R\left(\frac{1}{\xi}\right) \rightarrow 0$  con multiplicidad  $m - n$ .

Por tanto tenemos  $m$  (grado de la función racional) soluciones en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Caso 2:

$w = \infty$ . Para ver este caso, consideramos la función racional  $\frac{1}{R(z)} = \frac{q(z)}{p(z)}$  y aplicamos al caso 1.

Caso 3:

$$w = \frac{a_n}{b_n}.$$

Si  $d = n$ , el grado de  $\frac{p(z) - wq(z)}{q(z)}$  es  $n$  y tiene  $n$  soluciones.

Si  $d = m$ , hay  $m$  soluciones, porque el grado de  $\frac{p(z) - wq(z)}{q(z)}$  es  $m$ .

Y si  $d = n = m$ , tenemos que la función racional  $\frac{p(z) - wq(z)}{q(z)}$  es de grado  $m$ , pues  $p(z) - wq(z)$  tiene grado  $k < m$ , aplicamos el caso 1, es decir que la ecuación  $\frac{p(z) - wq(z)}{q(z)} = 0$  tiene  $m$  soluciones en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Conclusión 2.5** Si la función racional es de grado  $d = \max(\text{grado}(p), \text{grado}(q))$  entonces es  $d + 1$  (contando multiplicidad).

Ejemplos:

$$R(z) = \frac{z^4}{z^4 + 1}.$$

$$\frac{z^4}{z^4 + 1} = w.$$

Si  $w = 0$ , entonces los ceros de  $R$  son los ceros de  $p(z)$ , en este caso es el cero.

Si  $w = \infty$ , tenemos las raíces cuartas de  $-1$  y por tanto el  $\infty$  no es polo.

si  $w \neq 0, \infty$  :

$$z^4 - w(z^4 + 1) = 0,$$

$$(1 - w)z^4 - w = 0,$$

Si  $w \neq 1$ , el polinomio es de grado cuatro, entonces tenemos cuatro raíces.

Si  $w = 1$ , no hay raíces, ¿Qué es lo que está pasando aquí?

Sucede que  $R(\infty) = 1$ .

Para ver la multiplicidad, nos vamos al origen:

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{1 + \zeta^4} = 1 - \zeta^4 + \zeta^8 - \dots$$

El punto 0 va al 1, entonces  $\frac{1}{1 + \zeta^4} - 1 = \zeta^4(-1 + \zeta^4 - \dots)$ , es decir que cerca del cero se comporta como  $z^4$ .

Cerca del cero se ve así, y por tanto el  $\infty$  es preimagen múltiple.

Podemos tener cosas menos drásticas, por ejemplo:

$$R(z) = \frac{z^4 + z^2}{z^4 + 1},$$

$(1 - w)z^4 + z^2 - w = 0$ , igual para  $w = 1$ , tenemos que se baja el grado del polinomio, aquí sería de grado dos y si  $w \neq 1$ , el polinomio es de grado cuatro.

**Ejercicio 2.6** *Discutir la relación que hay entre los puntos que son preimagen múltiple y los ceros de la derivada ( $R'(z)$ ).*

### 2.3.4. Función de Zhukovsky

Ahora estudiaremos la siguiente función:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

El grado de ésta función racional es 2, así que la función es 2 a 1.

Los polos son: 0 y  $\infty$ .

Los ceros son:  $i$  y  $-i$ .

Ahora veamos las preimágenes, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\frac{z^2 + 1}{2z} = w$$

$$\Rightarrow z^2 - 2zw + 1 = 0,$$

$\Rightarrow$  tenemos dos raíces distintas para todo valor  $w$  distinto de  $\pm 1$ .

Si  $w = 1, w = -1$ :

$$(z - 1)^2 = 0, (z + 1)^2 = 0,$$

esto significa que  $z = 1$  y  $z = -1$ , son raíces dobles de la ecuación.

Así todo punto en el plano- $w$  tiene dos preimágenes diferentes y sólo dos puntos tienen preimágenes dobles.

$$f(1) = 1, f(-1) = -1.$$

¿Qué está pasando alrededor del 1?

$$f(1+h) - 1 = \frac{(1+h)^2+1}{2(1+h)} - 1 = h^2 \frac{1}{2(1+h)} = \left( h \frac{1}{\sqrt{2(1+h)}} \right)^2$$

se parece a la función elevar al cuadrado. Si recordamos cómo  $z^2$  mapeaba la esfera, los puntos dobles eran el cero y el infinito, y los demás eran sencillos. Nos paramos en el 0 y en el  $\infty$ , y le damos dos vueltas a la esfera (cero es repulsor y el  $\infty$  es atractor).

Nos preguntamos ¿qué tanto se parecerá  $z^2$  a nuestra función  $f$ ?

Si hacemos cambios de Möbius en el dominio y en el contradominio, de tal manera que  $-1$  vaya al 0, y 1 vaya al  $\infty$

$$\zeta = \frac{z+1}{z-1},$$

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta+1}{\zeta-1} + \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right) = \frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1},$$

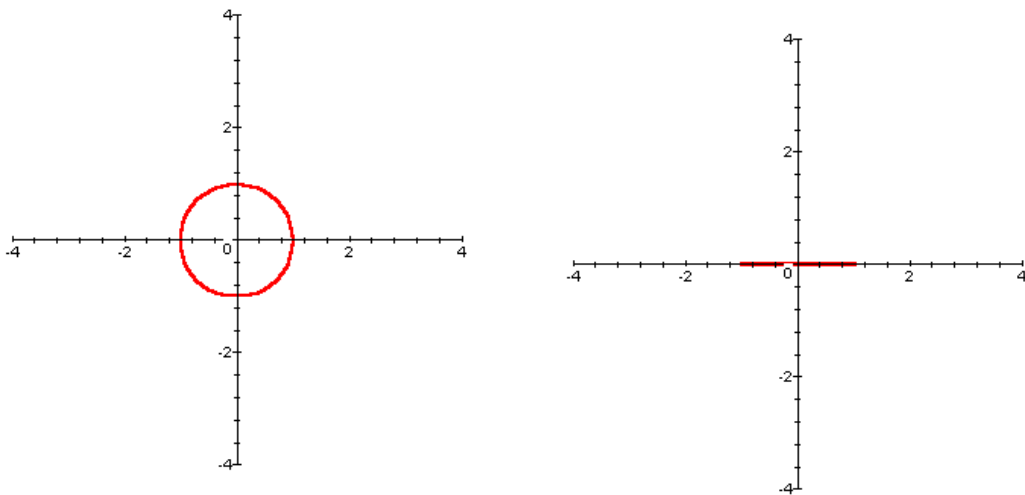
$$\eta = \frac{w+1}{w-1} = \frac{\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1} + 1}{\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1} - 1} = \frac{2\zeta^2}{2} = \zeta^2.$$

Utilizamos un cambio de variable pero puede haber más. Por lo tanto nuestra función sí es como elevar al cuadrado, y esto se cumple más en general, cualquier función racional de grado dos se comporta como  $z^2$  esto incluye por supuesto a los polinomios de grado



dos.

Como nuestra función se comporta como  $z^2$ , hay dos puntos que van a dar al mismo:  
 $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = f(\frac{1}{z})$   
 observemos que para un  $w$ , una preimagen está en el disco ( $|z| < 1$ ) y otra fuera.  
 El círculo unitario va al segmento  $[-1, 1]$  recorrido dos veces.



Si consideramos el disco, se mapeará en todo el plano menos el segmento, o bien si consideramos todo que está fuera del disco se mapeará en todo el plano menos el segmento.

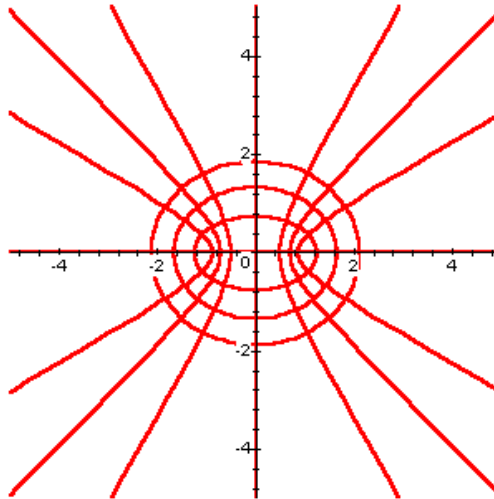
Si tomamos círculos de radio  $r$ ,  $0 < r < 1$ , sus imágenes son elipses con eje mayor igual  $r + \frac{1}{r}$  y eje menor igual  $r - \frac{1}{r}$ . Cuando el radio decrece, los semiejes (mayor y menor) crecen, es decir que cuando nos acercamos al cero, la función tiende a  $\infty$ .

Los puntos  $z = t(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , donde  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  y  $t \in [0, 1)$ , bajo la función van a hipérbolas con semiejes  $|\cos \alpha|$  y  $|\sin \alpha|$ .

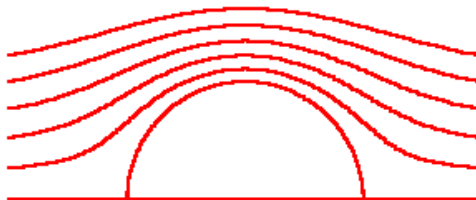
Cuando  $\alpha = 0$ , tenemos  $w = (\frac{1}{2}(\frac{1}{t} + t), 0)$ , el intervalo  $[0, 1]$  se “dobla” hacia el intervalo  $[1, \infty)$ .

Cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $w = (0, \frac{t}{2} - \frac{1}{2t})$ , tenemos el eje imaginario negativo, recorrido desde el  $\infty$  al 0.

Al variar  $\alpha$ , la imagen está en el cuarto cuadrante y si tomamos  $-\alpha$ , obtenemos una rama de la hipérbola (cuadrantes I y IV) y al tomar los puntos simétricos con respecto al origen obtenemos la otra rama de la hipérbola.



Se puede ver que el semidisco en la parte superior del plano se mapea en el semiplano inferior, el semidisco que está en la parte inferior del plano se mapea en el semiplano superior, por tanto los puntos inversos del semidisco inferior se mapearán en el semiplano superior. Es decir que el semiplano superior "mordido" se mapea de manera conforme al semiplano superior.



A esta función  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ , se le llama **Función de Zhukovsky**.

Nuestro problema ahora es buscar la inversa:

$$f(z) = w,$$

$$\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = w,$$

despejamos y obtenemos

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1},$$

en la expresión se refleja el 2 a 1, para un valor de  $w$  tenemos dos soluciones  $z_1, z_2$ . Pero ya sabíamos que  $z$  y  $1/z$  van a dar al mismo punto. Luego debe cumplirse  $z_1 = 1/z_2$ . (Dejamos al lector verificar directamente esto calculando el producto  $z_1 z_2$ ). Los únicos puntos dobles son cuando  $z_1 = 1/z_1$ , es decir, 1 y  $-1$ . Sus imágenes son también 1 y  $-1$ , es decir, los valores de  $w$  para los cuales  $w^2 - 1 = 0$  y la ecuación en  $z$  tiene raíz doble.

## 2.4. La exponencial y las funciones trigonométricas

### 2.4.1. Función Exponencial

¿Cómo podemos extender la función  $\exp x$  a los complejos?

Las propiedades fundamentales de la función exponencial tienen que conservarse en nuestra nueva definición:

- i) Que es solución de una ecuación diferencial:  $f' = f$ , con condición inicial  $f(0) = 1$
- ii) Que cumpla con la propiedad de suma-producto:  $e^{x+y} = e^x e^y$

Una opción para deducir la exponencial compleja sería partir de la serie de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

y demostrar que la serie compleja

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots$$

también converge, dar el radio de convergencia, etc.

Otra es ver quién es  $e^{iy}$ . Como queremos una función que siga cumpliendo  $e^{z+w} = e^z e^w$ , entonces naturalmente se tendría que  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ , ya sabemos como es  $e^x$ , el problema es  $e^{iy}$ :

Si sustituímos  $iy$  en  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$

tenemos  $e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \dots$

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots)$$

(aquí tenemos dos series reales conocidas)

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

por lo tanto tendríamos que  $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ .

Pero hay otra opción más geométrica que nos muestra un poco más qué es lo que está pasando:

Recordemos que para  $\mathbb{R}$ :

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

este límite se demuestra tomando logaritmos (en base  $e$ ).

Primero veamos quién es el límite de  $\log(1 + \frac{x}{n})^n$ :

$$\log(1 + \frac{x}{n})^n = n \log(1 + \frac{x}{n})$$

consideremos a  $n$  como una variable continua  $h$  entonces tenemos que:

$$n \log(1 + \frac{x}{n}) = h \log(1 + \frac{x}{h});$$

si existe este último límite cuando  $h \rightarrow \infty$  entonces existe el límite de  $\log(1 + \frac{x}{n})^n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sea  $u = \frac{1}{h}$ :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h \log(1 + \frac{x}{h}) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1+ux)}{u} = ?$$

Sea  $g(u) = \log(1 + ux)$

$$g'(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(u) - g(0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1 + ux)}{u}$$

$$g'(u) = \frac{x}{1 + ux}$$

Por tanto  $? = g'(0) = x$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{x}{n})^n = x$$

$$\therefore (\text{Por continuidad}) e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

Para  $\mathbb{C}$ :

¿Cómo se vería esta función  $(1 + \frac{z}{n})^n$ ?

Estamos elevando un número complejo a una potencia  $n$ , esto es elevar su módulo y multiplicar su argumento  $n$  veces.

Si tomamos un sector que parta del punto  $-n$  y tenga como ángulo  $\frac{\pi}{n}$ , la transformación lo mandará otro sector que parta del origen y tenga como ángulo  $\pi$ , es decir el

semiplano superior:

Estamos elevando el sector a la potencia  $n$ . ¿Qué pasa cuando  $n \rightarrow \infty$ ?

El punto  $-n$  se va recorriendo hacia la izquierda por el eje real negativo, tendríamos un sector con un punto al  $\infty$ , es decir lo que está entre las líneas paralelas:

¿De qué ancho es esta banda?

Sea  $h_n$  la longitud del segmento OQ.

$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{h_n}{n}$  y  $h_n = n \tan \frac{\pi}{n}$ , si hacemos el cambio a la variable continua  $n = \frac{1}{u}$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan \pi u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \pi \sec^2 \pi u = \pi$$

Por lo tanto el ancho de la banda es  $\pi$ .

Si tomamos el siguiente sector, al elevarlo a la potencia  $n$  obtenemos el semiplano inferior

Lo que tenemos en el límite es la función exponencial, la banda de ancho  $\pi$  se transforma en un sector de ángulo  $\pi$ , y si tomamos la siguiente banda de ancho  $\pi$ , la imagen es el sector de ángulo  $-\pi$ , por lo tanto si tomamos una banda de tamaño  $2\pi$  se mapearía en todo el plano menos el cero.

Así que cada  $2\pi i$ , tenemos el mismo valor, por lo que la función es periódica.

Ahora ¿qué pasa con  $e^{iy} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{iy}{n})^n$ ?

Escribamos

$$(1 + \frac{iy}{n}) = r_n (\cos \theta_n + i \operatorname{sen} \theta_n),$$

$$r_n^n = \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\log \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \log \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right) \text{ Hacemos el cambio de variable } n = \frac{1}{u},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \log \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \log \frac{(1+u^2 y^2) u}{u^2} \frac{u}{2} = 0.$$

Por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n = 1$ .

Para  $\theta_n = \arctan \frac{y}{n}$  tenemos que  $n\theta_n = n \arctan \frac{y}{n}$ ,

haciendo  $n = \frac{1}{u}$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan uy}{u} = y$ .

Por tanto  $n\theta_n \rightarrow y$ .

$$e^{iy} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{iy}{n})^n = \cos y + i \operatorname{sen} y,$$

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

(Fórmula de Euler)

Así las cosas tenemos que la definición más adecuada es :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

para toda  $z \in \mathbb{C}$ , y no se anula, es decir no es sobreyectiva :  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$

## 2.4.2. Transformación del Plano bajo la función exponencial

Nos interesa ver cómo se transforma la malla de rectas horizontales y verticales.

$$f(x, y) = e^x(\cos y, \operatorname{sen} y)$$

Para una recta cualquiera paralela al eje real:

$$f(x, y_0) = e^x(\cos y_0, \operatorname{sen} y_0)$$

$$\text{O bien } w = e^x(\cos y_0 + i \operatorname{sen} y_0)$$

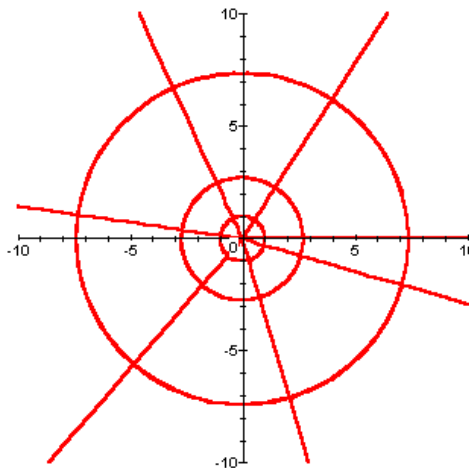
Se transforman en un rayo con ángulo  $y_0$ , que parte del origen y que va creciendo conforme crece la  $x$ .

Para una recta paralela al eje imaginario la función la transforma en un círculo de radio  $e^{x_0}$  y al recorrer  $y$  los reales, le daremos infinitas vueltas al círculo.

$$f(x_0, y) = e^{x_0}(\cos y, \operatorname{sen} y),$$

si  $0 \leq y_0 < 2\pi$ , el círculo se recorre una sola vez.

Por lo tanto la familia de rectas horizontales se transforman en la familia de rayos que parten del origen y la familia de rectas verticales se transforman en la familia de círculos con centro en el origen.



Calculemos el jacobiano de la función  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$

$$\det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

Esto nos habla que existe la inversa localmente y también por la forma de la matriz derivada, vemos que es una transformación que preserva los ángulos.

¿Qué sucede en el infinito?

Si  $z \rightarrow \infty$ , la función se acerca a todos los valores posibles:

Sea  $\{z + 2k\pi i\}$ , esta sucesión tiende a infinito y  $f\{z + 2k\pi i\} = e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$ .

No existe el límite en el  $\infty$ , el comportamiento que tenemos es oscilatorio, por lo que la exponencial compleja no se puede extender de manera continua a  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

### 2.4.3. Función Logaritmo

La inversa de la función exponencial es la función *logaritmo*.

Como el cero no está en la imagen de la función exponencial, entonces no va a tener logaritmo.

Sea  $w \neq 0$ ; la solución a la ecuación  $e^z = w$  es:

$x = \log |w|$  (logaritmo de un número real positivo), y  $\arg w = y + 2k\pi$

tenemos que todo número complejo distinto de cero tiene una infinidad de logaritmos los cuales difieren por múltiplos de  $2\pi i$ .

$$\log w = \log |w| + i \arg w$$

El logaritmo de un número real positivo, será el logaritmo real.

Como vimos con la raíz cuadrada, no es posible encontrar una rama continua del logaritmo en todo el plano menos el origen.

Aquí es inclusive más claro, porque la parte imaginaria de  $\log w$  es exactamente  $\arg w$ , y ya sabemos que no se puede elegir de manera continua el argumento de todo complejo distinto de cero.

Podemos, otra vez, definir diversas ramas del logaritmo en cualquier región donde no podamos darle vuelta al origen. En particular tenemos la rama, o valor principal del logaritmo definida en  $\mathbb{C} - \{\text{eje real negativo}\}$ :

Valor principal del logaritmo:

$$\log z = \log |z| + i \arg z \text{ donde } -\pi < \arg z < \pi$$

$$z \in \mathbb{C} - \{\text{eje real negativo}\}$$

La imagen es una banda abierta (sin bordes).

Eje real negativo sería mandado a las rectas horizontales de altura  $\pm\pi$  ( bordes).

Eje real positivo va a todo el eje real.

Para las rectas horizontales que están en el semiplano superior, el ángulo varía de  $\pi$  a 0, las imágenes serán curvas que vienen asintóticamente de la recta horizontal de altura  $\pi$  y se van pegando asintóticamente al eje real.

Y para las rectas horizontales que están en el semiplano inferior, el ángulo varía de  $-\pi$  a 0, entonces las curvas imagen vienen asintóticamente de  $-\pi$  y se van pegando al eje real.

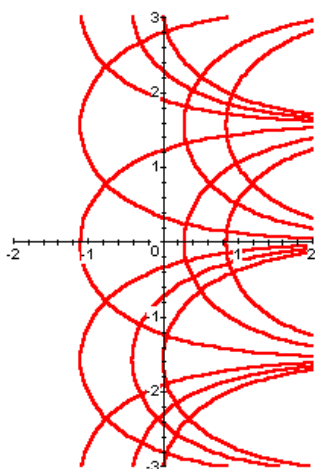


El eje imaginario positivo va a la recta de ordenada  $\frac{\pi}{2}$ . Y el negativo a la recta de ordenada  $-\frac{\pi}{2}$ .

Las rectas verticales ( $x$  positiva), el ángulo varía de  $-\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{\pi}{2}$ . Las curvas imagen vienen asintóticamente de la recta con ordenada  $-\frac{\pi}{2}$ , cruzan el eje real y se van pegando a la recta con ordenada  $\frac{\pi}{2}$ .

Finalmente las imágenes de las rectas verticales ( $x < 0$  e  $\text{Im } y > 0$ ) son curvas que van del borde de la banda (altura  $\pi$ ) y se van pegando a la recta de ordenada  $\frac{\pi}{2}$  y para las semirectas en la parte inferior del plano, las imágenes son curvas que van del otro borde de la banda (altura  $-\pi$ ) y se van pegando a la recta de ordenada  $-\frac{\pi}{2}$ .

Por lo que el dibujo de la imagen de la malla de rectas horizontales y verticales queda así:



Ya definido el logaritmo, podemos definir ahora la potencia compleja:

sea  $z \neq 0$  y  $\alpha$  números complejos

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

Si consideramos  $z$  positivo entonces  $\log z$  es real y  $z^\alpha$  tendrá un solo valor. Si no hay restricción para  $z$ , entonces en general tendremos una infinidad de valores.

#### 2.4.4. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Si  $e^{iy} = \cos y + i \text{sen } y$

entonces  $e^{-iy} = \cos y - i \text{sen } y$

sumando y dividiendo entre dos tenemos:

$$y \in \mathbb{R} \\ \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y \text{ y } \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \text{sen } y$$

Como vemos las funciones seno y coseno se pueden expresar en términos de la exponencial compleja. Esto nos permite de manera natural extenderlas (de modo que se conserven las propiedades) a variable compleja.

**Definición 2.3**  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\end{aligned}$$

(Otra forma de definir las funciones trigonométricas principales es por medio de series).

De nuestra definición tenemos:

$$\cos(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \cos x \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - i \operatorname{sen} x \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} hy$$

$$\cos iy = \cosh y$$

$$\operatorname{sen} iy = i \operatorname{sen} hy$$

y podemos definir  $\cosh z$  y  $\operatorname{sen} hz$  :

**Definición 2.4**

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sen} hz &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}\end{aligned}$$

Se podría haber definido primero las funciones hiperbólicas y después las trigonométricas:

$$\cos(z) = \cosh(iz) \text{ e } i \operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen} h(iz).$$

Todo queda bien definido porque se expresa en términos de  $e^z$ .

Vale la fórmula de la suma:  $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'$$

$$\operatorname{sen}(z + z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z'.$$

Estas fórmulas se demuestran con base en la fórmula de la suma de la exponencial y son de gran utilidad para demostrar más propiedades, por ejemplo,  $1 = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$ .

Con las funciones seno y coseno, podemos definir todas las demás funciones trigonométricas:  $\tan z$ ,  $\cot z$ ,  $\sec z$ ,  $\csc z$ .

## 2.4.5. Función coseno y su inversa

¿Cómo se transforma el plano bajo la función  $f(z) = \cos z$  ?

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

En el plano-w tenemos que:

$$(u, v) = (\cos x \cosh y, \operatorname{sen} x (-\operatorname{senh} y))$$

El eje real va al segmento  $[-1, 1]$  recorrido una infinidad de veces.

$$f(x, 0) = (\cos x, 0)$$

Para una recta horizontal de altura  $b$ , tenemos:

$$f(x, b) = (\cos x \cosh b, \operatorname{sen} x (-\operatorname{senh} b)) = (A \cos x, B \operatorname{sen} x),$$

donde

$$A = \cosh b, B = (-\operatorname{senh} b)$$

que nos parametriza la elipse de ecuación  $\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1$ , y cuyos focos son  $\pm 1$ .

Si la altura de la recta horizontal es  $-b$ , la elipse se recorre en sentido contrario.

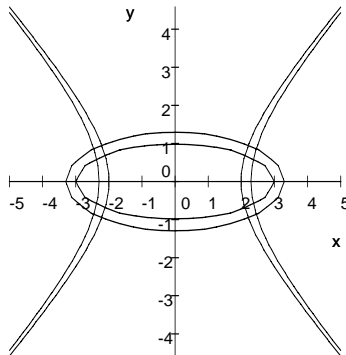
Y para las rectas verticales tenemos hipérbolas:

$$f(a, y) = (\cos a, \cosh y, \operatorname{sen} a (-\operatorname{senh} y)) = (A' \cosh y, B' (-\operatorname{senh} y)) = (u, v)$$

encontramos que  $\frac{u^2}{A'^2} - \frac{v^2}{B'^2} = 1$ , que es la ecuación de una hipérbola con focos  $\pm 1$ , donde  $A' = \cos a$  y  $B' = \operatorname{sen} a$ .

Si  $x = 0$ , tenemos que el eje imaginario va al segmento  $[1, \infty)$ , recorrido dos veces.

Por lo que la malla de rectas horizontales y verticales se transforma en una malla de elipses e hipérbolas que tienen los mismos focos (confocales), esto implica que se cortan en ángulo recto.



Conviene pensar la función coseno como composición de funciones que ya hemos estudiado:

$$w = \cos z = \frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right) \text{ (Función de Zhukovsky)}$$

donde  $u = e^{iz}$  (multiplicación por  $i$ , después la exponencial).

Como el coseno está en términos de la exponencial y ésta es periódica, el coseno también va a ser una función periódica, la diferencia es que el período del coseno es  $2\pi$ .

Los puntos  $z, z + 2\pi, z + 4\pi, \dots$  y  $-z, -z + 2\pi, -z + 4\pi, \dots$  que están en bandas de tamaño  $2\pi$ , al multiplicarlos por  $i$  y después componerlos con la exponencial van a dos valores, la primera infinidad va al valor  $u$ , y la segunda va al valor inverso  $\frac{1}{u}$ .

Y como vimos anteriormente, la imagen que obtenemos al final es la malla de elipses e hipérbolas.

Tenemos entonces que una infinidad de puntos van a dar a un mismo valor.

La función inversa es  $g(w) = \text{ang} \cos w$ , nuevamente tenemos una función multivaluada.

Si sacamos las inversas de las funciones anteriores vemos que

$$u = e^{iz}$$

entonces

$$2w = u + \frac{1}{u}$$

$$u^2 - 2wu + 1 = 0$$

$$u = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

aquí tenemos problemas con la raíz, pero lo arreglamos tomando una rama,

$$iz = \log u = \log(w \pm \sqrt{w^2 - 1})$$

y al tomar el logaritmo, también debemos escoger una rama adecuada,

$$z = -i(\log(w \pm \sqrt{w^2 - 1}))$$

entonces dado un  $w$  podemos escoger el punto  $z$  de muchas maneras, es decir que tenemos las funciones  $\text{ang} \cos w$  que queramos.

Por ejemplo podemos tomar como dominio  $\mathbb{C} - \{[-1, 1]\}$ , y  $z = -i(\log(w + \sqrt{w^2 - 1}))$  con la rama principal del logaritmo.

# Capítulo 3

## Derivación de Funciones Complejas

### 3.1. Función derivable

#### 3.1.1. Ejemplos de funciones derivables y no derivables.

**Definición 3.1** Sea  $U \subset \mathbb{C}$   $U$  abierto, conexo  $h \in \mathbb{C}$

$f$  es derivable en  $z_0 \in U$  si el  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$  existe

En tal caso, a dicho límite le llamamos la derivada de  $f$  en  $z_0$  y se denota por  $f'(z_0)$ .

Formalmente la definición es idéntica a la de la derivada de funciones reales, pero vamos a ir viendo que tiene implicaciones muy diferentes. Lo que hay que destacar es que aquí  $h$  es un número complejo, que puede tender a 0 por muy diferentes direcciones o maneras, y que por lo tanto, pedir que en esas condiciones exista el límite es muchísimo pedir. Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 3.1**  $f(z) = z^2$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)^2 - z_0^2}{h} = \frac{2z_0h + h^2}{h} = \frac{h(2z_0+h)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2z_0 + h = 2z_0$$

la función es derivable en todo  $z_0$  y  $f'(z_0) = 2z_0$

**Ejemplo 3.2**  $f(z) = \bar{z}$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

si  $h \in \mathbb{R}$

$$\text{tenemos que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{pero si } h = is \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-is}{is} = -1$$

ahora si  $h = u$  donde  $u$  es un complejo con norma uno y  $s$  es cualquier número real

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \bar{u}^2$$

escribiendo  $u = e^{i\theta}$  se tiene que  $\bar{u}^2 = e^{-2i\theta}$ .

El límite no existe, haciendo tender  $h$  a 0 por distintas direcciones se acerca el cociente a muy diferentes valores. Por lo tanto esta función no es derivable en ningún punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

**Ejemplo 3.3**  $f(z) = |z|$

Si  $z_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

como  $\frac{|h|}{h}$  es cualquier complejo de módulo uno, entonces la función no es derivable en el cero.

Si  $z_0 \neq 0$  tomemos primero  $h$  en la misma dirección de  $z_0$ , es decir  $h = tz_0$  con  $t$  real  $> 0$ .

Entonces  $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{|z_0+h|-|z_0|}{h} = \frac{|z_0|t}{z_0t} = \frac{|z_0|}{z_0}$  que es un complejo unitario.

Si ahora hacemos que  $z_0 + h$  se acerque a  $z_0$  sobre el círculo con centro en 0 que pasa por  $z_0$ , es decir, si  $h = e^{i\theta}z_0 - z_0$  tenemos

$$\frac{|z_0+h|-|z_0|}{h} = \frac{|z_0|e^{i\theta}-|z_0|}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = 0$$

por lo tanto la función no es derivable en ningún  $z_0 \in \mathbb{C}$

Observamos que no es tan fácil que una función sea derivable, la función  $f(z) = \bar{z}$ , es sencilla y no es derivable en ningún punto. De aquí que  $f(z) = \operatorname{Re} z$  y  $f(z) = \operatorname{Im} z$  no sean derivables.

Sin embargo, hay muchas que sí son derivables.

**Proposición 3.1** 1) Si  $f$  es derivable en  $z_0$ , entonces  $f$  es continua en  $z_0$ .

2) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $z_0$  entonces  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $fg$  son derivables en  $z_0$  y

si  $g(z_0) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  es derivable y  $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$

3) Regla de la cadena:

Si  $f$  es derivable en  $z_0$  y  $g$  es derivable en  $f(z_0)$ , entonces la composición  $(g \circ f)$  es derivable en  $z_0$  y  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .

La parte 1) se demuestra observando que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) - f(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} h = f'(z_0) 0 = 0.$$

Todas las demas partes de esta proposición también se demuestran exactamente igual que en el caso real, como podrá verificar fácilmente el lector.

Con esta proposición tenemos muchas funciones derivables. Como la función  $z$  es obviamente derivable, los polinomios son derivables, y también cualquier función racional es derivable en cualquier punto donde no se anule el denominador (y, en particular, todas las transformaciones de Möbius son derivables).

Otro ejemplo:

**Ejemplo 3.4** *Escogiendo una rama continua en un dominio adecuado:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z_0+h} - \sqrt{z_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0+h - z_0}{h(\sqrt{z_0+h} - \sqrt{z_0})} = \frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$

*Obsérvese que sólo hemos usado la continuidad de la función. Luego, toda rama continua de  $\sqrt{z}$  es automáticamente derivable.*

### 3.1.2. Una función es derivable si, y sólo si, lo es como función real y su derivada es $\mathbb{C}$ -lineal.

Consideremos a la función  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , como una función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Recordemos que  $F$  es derivable en  $(x_0, y_0)$  si existe una función lineal  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x_0+s, y_0+t) - F(x_0, y_0) - L(s,t)}{|(s,t)|} = 0$$

Esto significa que  $L$  es la mejor aproximación lineal a  $F$ , se le suele denotar por  $D_F(x_0, y_0)$  y es la transformación lineal que tiene por matriz (respecto a la base usual de  $\mathbb{R}^2$ ) a la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ahora, para  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , si  $f$  es derivable en  $z_0$  entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \alpha h}{h} = 0$

por tanto tenemos que:

$f$  es derivable en  $z_0 \Leftrightarrow$  existe una función lineal de la forma  $L(h) = \alpha h$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - L(h)}{h} = 0$ .

Pero ya conocemos las funciones lineales de esa forma: son las  $\mathbb{C}$ -lineales, que incluyen las conformes (que son homotecias seguidas de rotaciones) y la función 0.

**En resumen:**

$f$  es derivable como función compleja en  $z_0$  si y sólo si  $f$  es derivable como función real en  $(x_0, y_0)$  y su derivada en el punto es conforme (o cero).

De otro modo, la condición es que la matriz jacobiana tenga la forma  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  y por lo tanto se debe de tener

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

a estas últimas ecuaciones se les llama de Cauchy-Riemann ( $C - R$ ).

Recíprocamente, si tenemos una función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que sea derivable y que sus parciales satisfagan ( $C - R$ ), esto quiere decir que su derivada es de la forma  $L(z) = \alpha z$  para algún número complejo  $\alpha$  y por lo tanto  $f$  es derivable como función compleja y su derivada es  $\alpha$ . Luego hemos demostrado:

**Teorema 3.1** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja y  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ .

Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

(i)  $f$  es derivable como función compleja en  $z_0$ .

(ii)  $f$  es derivable como función real en  $(x_0, y_0)$  y su derivada en ese punto es  $\mathbb{C}$ -lineal.

(iii)  $f$  es derivable como función real en  $(x_0, y_0)$  y sus derivadas parciales en ese punto satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Se sabe que una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es derivable en una región  $U$  si existen la derivadas parciales de  $F$  y son continuas en todos los puntos de  $U$  (condición que es suficiente, pero no necesaria). En muchos tratados de Variable Compleja se enuncia este Teorema en lugar de la equivalencia anterior, pero el enunciado queda más claro con el concepto de derivada. Pero este resultado es muy útil para verificar la derivabilidad de una función compleja en muchos casos, sólo hay que agregar que se cumplan las ecuaciones de  $C - R$ .

A la matriz  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  le corresponde el complejo  $a + ib$ , es decir,  $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ .

Si  $f'(z_0) = 0$ , la mejor aproximación lineal  $L(h) = \alpha h = f'(z_0)h$  es igual a 0, y ya no se puede ver que sucede.

Si  $f'(z_0) \neq 0$ , la mejor aproximación lineal en la vecindad del punto es una rotación más una homotecia, esto significa que la función cerca del punto se comportará así.

Locamente se preservarán los ángulos:

El ángulo( $\psi$ ) entre las curvas  $C_1$  y  $C_2$  es el ángulo formado entre sus tangentes en el punto  $z_0$ .

Sea  $\gamma_1$  el vector tangente a la curva  $C_1$  y sea  $\gamma_2$  el vector tangente a la curva  $C_2$  en el punto  $z_0$ , la función lineal mapeará  $\gamma_1$  en el vector  $\varphi_1$  que es el vector tangente a la curva imagen  $f(C_1)$  en el punto  $f(z_0)$

$$\varphi_1 = \alpha(\gamma_1) \text{ donde } \alpha = a + ib = f'(z_0)$$

$$\text{y } \varphi_2 = \alpha(\gamma_2)$$

Por tanto  $\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \angle(\varphi_1, \varphi_2)$  y la función es conforme.

**Definición 3.2**  $f$  es holomorfa en  $U$ , si  $f$  es derivable en todos los puntos de  $U \subset \mathbb{C}$



### 3.1.3. Derivación respecto a $z$ y a $z$ conjugada

Sea  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

Entonces formalmente podemos escribir  $f(z)$  como función de las variables  $z, \bar{z}$  que conviene pensar como variables independientes:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$f(z) = (u(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}), v(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}))$$

$$f(z) = u(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}) + iv(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i})$$

Entonces podemos hablar de " $\frac{\partial f}{\partial z}$ " y " $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ ":

Aplicando regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y})$$

Lo importante de esto es que si  $f$  es derivable ( $\mathbb{C}$ -*derivable*) entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{1}{2}(2\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{i}{2}(2\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$= (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) = f'(z)$$

En otras palabras, las ecuaciones de Cauchy- Riemann se pueden resumir en una sola:  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . Heurísticamente esto significa que una función compleja es derivable cuando "no depende de  $\bar{z}$ ".

En la práctica significa que si tenemos una función en cuya expresión aparece  $\bar{z}$  no debe ser derivable.

**Ejemplo 3.5** Si  $f(x + iy) = x^2 + y^2 = z \bar{z}$  tenemos que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$  y esto se anula sólo para  $z = 0$

### 3.1.4. Determinante jacobiano

Sea  $f(z)$  derivable en todo punto de  $U$  (Holomorfa)

Consideremos a  $f(z)$  como una función de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y obtengamos la matriz derivada Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

y su determinante jacobiano  $Jf = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = |f'(z_0)|^2$

Por tanto  $f'(z_0) = 0 \Leftrightarrow Jf(z_0) = 0$

Si  $f'(z_0) \neq 0$  entonces el  $Jf(z_0) \neq 0$  y tenemos de inmediato por el Teorema de la Función Inversa, que  $f$  es invertible en una vecindad del punto  $z_0$ .

### 3.1.5. Interpretación en Mecánica de Fluidos

Supongamos que tenemos el movimiento de un fluido “perfecto”, es decir que es estacionario, incompresible y no viscoso (irrotacional).

Si  $X = (U, V)$  es el campo vectorial que representa la velocidad del fluido en cada punto, tenemos que

i)  $X$  no depende del tiempo.

ii)  $\operatorname{div}(X) = 0$  (no se concentra o se expande)

iii)  $\operatorname{rot}(X) = 0$  (es irrotacional)

Como  $\operatorname{rot}(X) = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ , existe (al menos localmente) una función  $u(x, y)$  tal que  $X = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

A esta función se le llama potencial de las velocidades

Como  $\operatorname{div}(X) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow$  existe una función  $v(x, y)$  tal que el campo ortogonal  $X^\perp = (-V, U) = \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ .

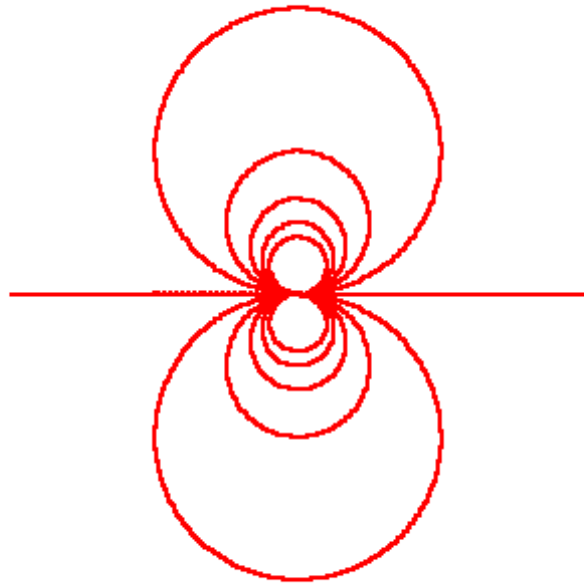
Y a esta función se le llama función de la corriente del fluido.

Entonces las líneas  $v = \text{constante}$ , representan el movimiento del fluido (líneas de corriente) y su vector tangente tiene la misma dirección que el vector velocidad ( $X$ ). Y cuando  $u = \text{constante}$  tenemos las líneas equipotenciales, que son ortogonales a las anteriores en cada punto.

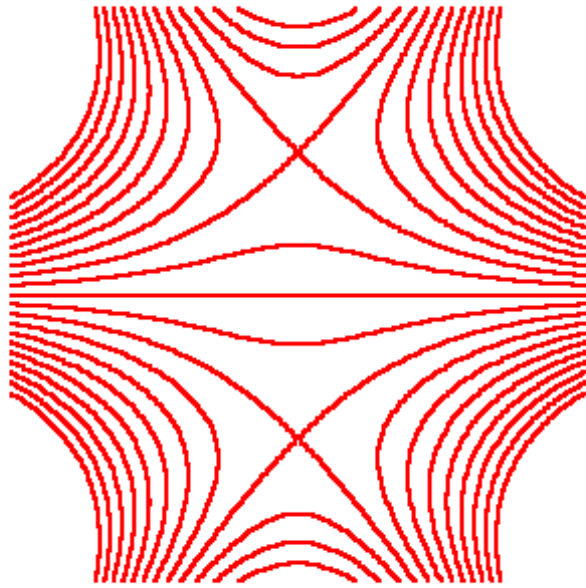
De esta manera, las curvas de nivel de  $u$  y de  $v$ , nos representan el movimiento del fluido como un todo.

Si consideramos a  $u$  como la parte real y a  $v$  como la parte imaginaria de una función compleja, entonces esta función cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann y es derivable: cualquier fluido perfecto me produce una función de variable compleja derivable y viceversa. Esto nos da una forma más de ver geoméricamente una función de variable compleja, dibujando las líneas de flujo del fluido. Los puntos donde la derivada de la función se anula son los puntos estacionarios del fluido. Esta representación fue muy usada en los inicios de la teoría, sobre todo por Riemann.

Veamos algunos ejemplos de curvas de nivel para  $v$  constante (fluidos):

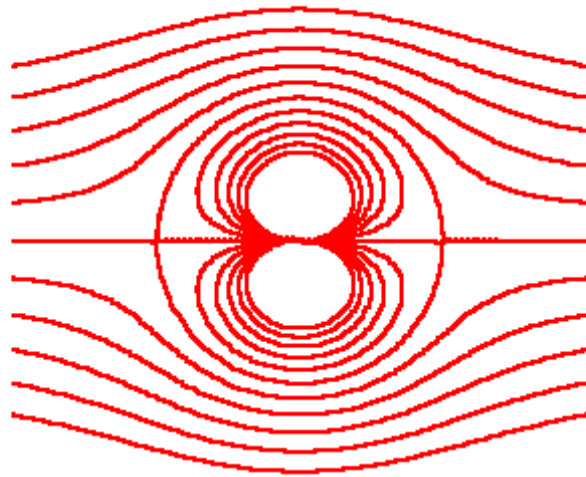


$$1/z$$



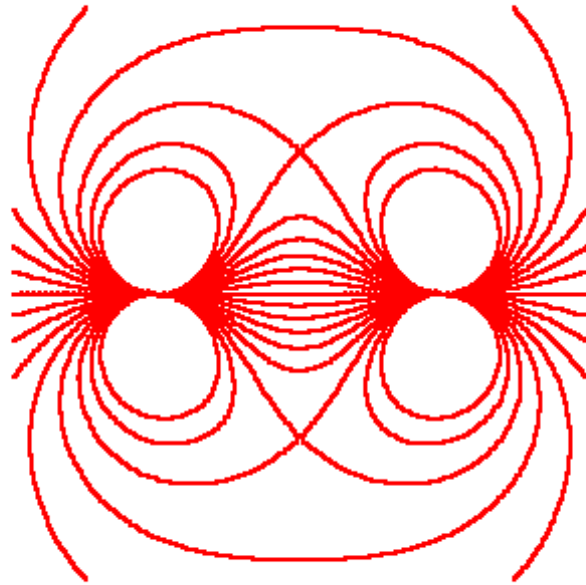
---

$$z^3 - 3z$$



$$(z + 1/z)/2 \text{ (Jukovsky)}$$

Después de observar las anteriores, ¿puede el lector identificar la siguiente función?



¿?

## 3.2. Teorema complejo de la función inversa

### 3.2.1. Teorema complejo como corolario del real

#### **Teorema 3.2** *Teorema de la Función Inversa (Complejo)*

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$  derivable en todo punto de  $U$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f'(z_0) \neq 0$

Entonces existen vecindades  $V_1$  de  $z_0$ ,  $V_2$  de  $f(z_0)$  tal que  $f|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2$  es invertible y la inversa  $g$  es derivable y vale  $g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$

**Demostración** Considerando a  $f$  como función de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tenemos que  $Jf$  en el punto  $z_0$  es distinto de cero, por el teorema de la Función Inversa (Real) la función es invertible en una vecindad de  $z_0$ , siendo la matriz de la derivada de la forma  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , la inversa también es de la misma forma por lo tanto es  $\mathbb{C}$ -lineal y la función inversa es derivable.

Finalmente  $f(g(w)) = w$ , y  $f'(g(w))g'(w) = 1$ ,  
por tanto  $g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$ . ✓ ■

Por ejemplo, si la derivada de  $f(z) = e^z$ , es  $e^z$ , entonces  $f'(z_0) \neq 0$  para cualquier punto y por el teorema anterior la derivada de la inversa sería

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{e^{\log w}} = \frac{1}{w}$$

Esto es válido para cualquier rama del logaritmo.

### 3.2.2. Función armónica

Otra consecuencia importante de las ecuaciones de Cauchy-Riemann es:

Si  $f : u + iv$  es derivable y suponemos que  $u, v$  son de clase  $C^2$ , entonces de

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

se deduce inmediatamente que  $u$  y  $v$  satisfacen la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Una función real que satisface la ecuación de Laplace se le llama armónica. Estas funciones tienen diversas aplicaciones en la Física, por ejemplo en el estudio de la temperatura de un cuerpo en equilibrio.

Tenemos entonces que la parte real y la parte imaginaria de una función derivable son funciones armónicas. Y dada cualquier función armónica podemos encontrar una función derivable cuya parte real (o imaginaria) es la función armónica.

### 3.2.3. Derivabilidad de las funciones elementales

Si la función exponencial es derivable, entonces tendríamos muchas más funciones derivables. Podemos hablar de las derivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas ( $\operatorname{sen} z, \operatorname{cos} z, \operatorname{tan} z, \operatorname{senh} z, \operatorname{cosh} z$ , etc.), pues cada una de ellas involucra a la exponencial. Estas derivadas prácticamente ya las conocemos.

$f(z) = e^z$  es derivable

sea  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z_0+h} - e^{z_0}}{h} = e^{z_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\text{y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Para demostrar este límite, es más fácil verlo con series:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!} \right) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!} \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

Otra manera de argumentar que la exponencial es derivable es por Cauchy-Riemann. Tenemos que  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$  es una función derivable como función de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

por tanto  $f(z) = e^z$  es una función derivable para todo punto en  $\mathbb{C}$ .

Sabiendo que  $e^z$  es derivable, calculamos la derivada  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

$$f'(z) = e^z$$

Algunas funciones derivables y sus derivadas:

1)  $(e^z)' = e^z$

2)  $(\log z)' = \frac{1}{z}$

3)  $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$

4)  $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$

5)  $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$

6)  $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$

Como cualquier inversa trigonométrica (o hiperbólica) se puede expresar en términos del logaritmo, calcular su derivada involucra la derivada del logaritmo, para no tener problemas con las definiciones siempre debemos especificar muy bien las ramas.



# Capítulo 4

## Integración de Funciones Complejas

### 4.1. Integral Compleja

#### 4.1.1. La integración compleja como integral de línea

Habiendo dado nuestros primeros pasos en la derivación de funciones, pasemos a hacer lo mismo para la integración. Para definir la integral indefinida de una función compleja no hay mayor problema: simplemente es la antiderivada o, como se acostumbra más en las funciones complejas, la *primitiva*:

**Definición 4.1** Si  $f(z)$  una función compleja, una primitiva de  $f$  en un abierto  $U$  contenido en el dominio de  $f$  es una función holomorfa  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$  para toda  $z \in U$ .

Como en el caso real, si hay una primitiva de  $f$  en  $U$  hay muchas, pero todas difieren por constantes.

Definir la integral indefinida de una función compleja entre dos complejos  $\alpha$  y  $\beta$  requiere mayor cuidado. En el caso real el procedimiento usual consiste en partir el intervalo, hacer sumas de Riemann y pasar al límite. Pero en el caso complejo no hay siempre un segmento que vaya de  $\alpha$  a  $\beta$  dentro del dominio de definición de  $f$ , y aún habiéndolo no es fácil ver qué sucede cuando hacemos variar  $\beta$ , a menos que tomemos no sólo segmentos sino también otras líneas quebradas. O bien, se podrían tomar sucesiones de puntos entre un punto y otro y hacer sucesiones cuyos puntos estén cada vez más cercanos entre sí, y ver si las correspondientes sumas de Riemann convergen. Para que esto suceda es natural pensar que las sucesiones se van acomodando en torno de alguna curva, y así se llegaría también a tener que considerar integrales sobre curvas.

Para darle forma a todo esto, lo mejor es definir directamente las integrales complejas como *integrales de línea*.

Una curva  $\mathcal{C}$  en el plano complejo es la imagen de una función continua, definida en un intervalo cerrado. Es decir,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  y sus ecuaciones paramétricas están dadas por funciones continuas:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Si  $x(a) = x(b)$ ,  $y(a) = y(b)$  tenemos una curva cerrada. Si no se cruza, es una curva simple ( $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ , para  $t \neq s$ , con  $t, s \in (a, b]$ ).

Una curva  $\mathcal{C}$  es  $C^1$  por tramos, si  $\gamma(t)$  tiene derivada continua para  $a \leq t \leq b$ , excepto para un número finito de puntos.

**Ejemplo 4.1** 
$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 + i(t - 1) & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \\ (3 - t) + i & \text{si } 2 \leq t \leq 3, \\ i(4 - t) & \text{si } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

$\gamma$  parametriza una curva  $C^1$  por tramos, simple y cerrada.

El vector  $(x'(t), y'(t))$  es el vector tangente a la curva en el punto  $x(t) + iy(t)$ .

La integral de una función compleja de variable real  $z(t) = u(t) + iv(t)$  se define en términos de dos integrales reales. Y si tenemos  $w = f(z)$  definida en una región y  $\mathcal{C}$  es una curva  $C^1$  por tramos, la integral compleja se define como una integral de línea:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim \sum_{j=1}^n f(z_j^*) \Delta_j z$$

el intervalo  $a \leq t \leq b$  es subdividido en  $n$  partes por  $t_0 = a, \dots, t_n = b$ ,  $z_j = x(t_j) + iy(t_j)$  y  $\Delta_j z = z_j - z_{j-1}$ ,  $t_j^*$  es un punto en el  $j$ -subintervalo y  $z_j^* = x(t_j^*) + iy(t_j^*)$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &\approx \sum_{j=1}^n f(z_j^*) \Delta_j z = \sum_{j=1}^n \{u(x(t_j^*), y(t_j^*)) + iv(x(t_j^*), y(t_j^*))\} (\Delta_j x + i \Delta_j y) = \\ &= \sum_1^n (u \Delta_j x - v \Delta_j y) + i \sum_1^n (v \Delta_j x + u \Delta_j y) \end{aligned}$$

Cuando hacemos tender a cero la norma de la partición obtenemos que la integral de línea compleja es la combinación de los integrales de línea reales.

Por tanto tenemos:

Sea  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  que parametriza la curva  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_{\mathcal{C}} u dx - v dy + i \int_{\mathcal{C}} v dx + u dy = \int_a^b (u \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt}) dt + i \int_a^b (v \frac{dx}{dt} + u \frac{dy}{dt}) dt = \\ &= \int_a^b (u + iv) (\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \end{aligned}$$

Precisemos las definiciones correspondientes: necesitamos primero definir lo más simple que es,

I. Integral definida de una función compleja de variable real. En este caso se integran la parte real y la parte imaginaria de la función:

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} & a \leq t \leq b \\ g(t) &= u(t) + iv(t) \\ \int_a^b g(t) dt &= \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \end{aligned}$$

Ya con esta definición es natural definir la integral como sigue:

II. Integral compleja como integral de línea: en el integrando sustituimos la variable  $z$  por los valores de la curva y el símbolo  $dz$  por la velocidad de la curva e integramos respecto al parámetro:

Sea  $\mathcal{C}$  una curva  $C^1$  por tramos parametrizada por  $\gamma$ .

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C}$$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U$$

$$z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

III. Integral de línea con respecto a longitud de arco. Ésta es una integral auxiliar que nos sirve para hacer estimaciones. Geométricamente, su parte real e imaginaria representan el área de la superficie curva por encima de  $\mathcal{C}$  y debajo de la gráfica de la parte real e imaginaria de la función. Pero esta representación geométrica no le da mucho más claridad a la definición formal, que consiste en hacer las mismas substituciones que en el caso anterior:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) ds = \int_{\mathcal{C}} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

#### 4.1.2. Propiedades elementales de las integrales de línea complejas.

Las demostraciones de varias propiedades son esencialmente las mismas que para las integrales reales para funciones continuas. Demostraremos sólo algunas de ellas.

##### Propiedades de la integral I:

0) Definida si  $g$  es continua en  $[a, b]$ .

$$1) \int_a^b (g_1(t) + g_2(t)) dt = \int_a^b g_1(t) dt + \int_a^b g_2(t) dt$$

$$2) \int_a^b \alpha(g(t)) dt = \alpha \int_a^b g(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$3) \int_a^b g(t) dt + \int_b^c g(t) dt = \int_a^c g(t) dt \quad 0 < b < c$$

4) Si  $h : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$ , es de clase  $C^1$  tal que  $h(a') = a$  y  $h(b') = b$ ,

$$\int_a^b g(t) dt = \int_{a'}^{b'} g(h(s)) h'(s) ds$$

$$5) \left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt$$

6)  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  derivable ( $C^1$ )

$$\int_a^b G'(t)dt = G(b) - G(a).$$

**Demostración de (5)**

Caso fácil:

Supongamos que  $\int_a^b g(t)dt \geq 0$  :

$$\text{entonces } \left| \int_a^b g(t)dt \right| = \int_a^b g(t)dt = \operatorname{Re} \int_a^b g(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t)dt \leq \int_a^b |g(t)| dt. \checkmark$$

Caso general:

Existe un número complejo  $\lambda$  con  $|\lambda| = 1$  tal que  $\lambda \int_a^b g(t)dt$  sea un número real positivo

y estaríamos ya en el caso fácil, entonces

$$\left| \lambda \int_a^b g(t)dt \right| = \left| \int_a^b \lambda g(t)dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt. \checkmark \blacksquare$$

**Propiedades de la integral II:**

0) Definida si  $f$  es continua y  $\mathcal{C}$  es  $C^1$  por tramos

$$1) \int_{\mathcal{C}} (f_1 + f_2)(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f_1(z)dz + \int_{\mathcal{C}} f_2(z)dz$$

$$2) \int_{\mathcal{C}} \alpha f(z)dz = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$

3)  $\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$  , donde  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$  es la curva que se obtiene recorriendo primero la curva  $\mathcal{C}_1$  y después la curva  $\mathcal{C}_2$  .

4) Si  $\beta$  es una reparametrización de  $\gamma$  que conserva el sentido,  $\int_{\mathcal{C}_\gamma} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_\beta} f(z)dz$

**Demostración**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sea  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  creciente, derivable tal que  $\beta(s) = \gamma(h(s))$

$$\int_{\mathcal{C}_\beta} f(z)dz = \int_c^d f(\beta(s))\beta'(s)ds = \int_c^d f(\gamma(h(s)))\gamma'(h(s))h'(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\mathcal{C}_\gamma} f(z)dz. \blacksquare$$

$$5) \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| |dz|. \checkmark$$

**Demostración** Es análoga a la propiedad 5 de la definición anterior.  $\checkmark \blacksquare$

6) Si  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  derivable (y  $F'$  continua)

$$\int_{\mathcal{C}} F'(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

7) *Fórmula de cambio de variable* para integrales complejas.

Sean  $U_1$  y  $U$  dos regiones de  $\mathbb{C}$ .

Sea  $f$  continua en  $U$ .

$\mathcal{C}_1$  una curva en  $U_1$ .

$h : U_1 \rightarrow U$  una función derivable y su inversa también derivable y  $\mathcal{C} = h \circ \mathcal{C}_1$

$$\text{Entonces } \int_{\mathcal{C}} f(w)dw = \int_{\mathcal{C}_1} f(h(z))h'(z)dz$$

$$8) \int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz \text{ donde } -C \text{ es la curva } C \text{ recorrida en sentido contrario.}$$

**Ejemplo 4.2** Sea  $C = \text{círculo unitario}$

$$\int_C z dz = 0$$

$$\int_C z^2 dz = 0$$

$$\int_C \bar{z} dz = 2\pi i = 2i(\text{área encerrada por } C)$$

$\int_C \bar{z} dz = 2i(\text{área encerrada por } \gamma)$ , donde  $\gamma$  es una curva  $C^1$  por tramos, cerrada alrededor del origen.

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

$$\int_L \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i \quad L = \{z = a + e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\int_C |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \text{longitud}(C), C \text{ curva de } C^1 \text{ por tramos, parametrizada por } \gamma.$$

## 4.2. Teorema de la Primitiva

“Integrabilidad” de las potencias positivas y no negativas de  $z$  ...salvo una. Comparación con las integrales de línea reales: campos conservativos y diferenciales exactas.

### 4.2.1. Ejemplos de funciones “integrables” y “no integrables”

Sea  $C$  una curva  $C^1$  por tramos parametrizada por  $\gamma$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ .

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  una región (abierto conexo)

Nos preguntamos:

¿Cuándo la integral depende sólo de los extremos de la curva? O bien ¿Cuándo  $\int_C f(z)dz = 0$  para  $C$  cerrada?

Empezaremos con algunos ejemplos:

**Ejemplo 4.3** Sea  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$  y  $f(z) = z$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(-\sin t + i \cos t)dt = \int_0^{2\pi} (-2 \sin t \cos t)dt +$$

$$i \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = 0$$

**Ejemplo 4.4**  $\gamma(t)$  la misma que en ejemplo anterior y  $f(z) = \bar{z}$  entonces  $\int_C f(z)dz =$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t)dt = i \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = 2\pi i.$$

**Ejemplo 4.5** Ahora calculemos la integral de la función  $f(z) = \bar{z}$  sobre tres curvas distintas parametrizadas por:

$$\gamma_1(t) = \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

$$\gamma_2(t) = -\gamma(t) \text{ donde } \gamma(t) = \cos t + i \sin t, \quad \pi \leq t \leq 2\pi,$$

$$\gamma_3(t) = 1 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\mathcal{C}_1} \bar{z} dz = \int_0^\pi (\cos t - i \sin t)(- \sin t + i \cos t) dt = \pi i$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} \bar{z} dz = -i \int_\pi^{2\pi} dt = -\pi i$$

$$\int_{\mathcal{C}_3} \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - 2t)(-2) dt = 0$$

¿Qué podemos concluir de estos ejemplos? Que en el ejemplo (4.4) la integral sobre una curva cerrada fue distinta de cero, comparándolo con el (4.3), la función  $\bar{z}$  no es la derivada de una función y que en general para una función podemos tener distintos valores para la integral, es decir si depende de la trayectoria de la curva.

**Teorema 4.1 (de la Primitiva)**

Sea  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continua.

Son equivalentes:

(i)  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$  depende sólo de los extremos de la curva  $\mathcal{C}$  ( $f$  es "integrable")

(ii)  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \quad \forall$  curva cerrada

(iii) Existe  $F : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $U$  tal que  $F'(z) = f(z)$ .

En este último caso tenemos  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ .  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

**Demostración** (i) $\Rightarrow$ (ii)

Como la integral depende sólo de los extremos de la curva, basta calcular la integral sobre una curva  $\mathcal{C}$  constante. Sea  $\gamma_1(t) = \alpha$ ,  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{c_1}^b f(z) dz = \int_a^b f(\gamma_1(t)) 0 dt = 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sean dos curvas distintas  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  que unan los mismos puntos. Sea  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$  tenemos que  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{-\mathcal{C}_2} f(z) dz = 0$ .

Por lo tanto  $\int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$ , es decir, la integral sólo depende de los extremos.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea  $\mathcal{C}$  una curva  $C^1$  por tramos parametrizada por  $\gamma$ .

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(a) = \alpha, \quad \gamma(b) = \beta.$$

Tenemos por hipótesis que  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ , demostraremos que esta última integral es igual a  $F(\beta) - F(\alpha)$ . Si  $F = U + iV$ ,  $\gamma(t) = \sigma(t) + i\tau(t)$

$g(t) = F(\gamma(t)) = g_1(t) + ig_2(t)$ , tendríamos que  $g'(t) = g'_1(t) + ig'_2(t)$  y  $\gamma'(t) = \sigma'(t) + i\tau'(t)$

$$g'_1(t) = \frac{\partial U}{\partial x}(\sigma(t), \tau(t))\sigma'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(\sigma(t), \tau(t))\tau'(t)$$

$$g'_2(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(\sigma(t), \tau(t))\sigma'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\sigma(t), \tau(t))\tau'(t)$$

Como  $F$  es holomorfa esto implica que  $F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y}$

$F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}\right)(\sigma'(t) + i\tau'(t)) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\sigma'(t) - \frac{\partial V}{\partial x}\tau'(t)\right) + i\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sigma'(t) + \frac{\partial U}{\partial x}\tau'(t)\right) = g'(t)$ . Por tanto  $\int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b g'(t)dt = \int_a^b g'_1(t)dt + i\int_a^b g'_2(t)dt = g_1(t) \Big|_a^b + ig_2(t) \Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\beta) - F(\alpha)$ .

(i) $\Rightarrow$ (iii) Definimos  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi$ , por hipótesis está bien definida. Tomamos una poligonal con los segmentos paralelos a los ejes que una a  $z_0$  y  $z$ .

Para obtener la parcial de  $F$  con respecto a  $x$ , nos movemos en la dirección del eje real con un segmento que va de  $z = x + iy$  a  $z + h$ ,  $h$  real:

$$F(x + h + iy) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi + \int_z^{z+h} f(\xi)d\xi = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi + \int_0^h f(x + s + iy)ds$$

Derivando con respecto a  $h$  y evaluando en  $h = 0$ , se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y)$$

Hacemos lo mismo para obtener la parcial con respecto a  $y$ , nos movemos en la vertical de  $z = x + iy$  a  $z + ih$ :

$$F(x + i(y + h)) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi + \int_z^{z+h} f(\xi)d\xi = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi + \int_0^h f(x + i(y + s))ids$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = if(x, y).$$

Si  $f(x, y) = u + iv$  tenemos que  $\frac{\partial F}{\partial x} = u + iv$  y  $\frac{\partial F}{\partial y} = i(u + iv) = -v + iu$

Como  $f = u + iv$  es continua entonces las parciales de  $F$  son continuas (por lo tanto es diferenciable como función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ) y además tenemos que se cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann:  $F = U + iV$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= u & \frac{\partial V}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -v & \frac{\partial V}{\partial y} &= u \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $F(z)$  es holomorfa en  $U$  (dominio de  $f$ ) y que su derivada es  $f(z)$ .

■

#### 4.2.2. “Integrabilidad” de las potencias positivas y no negativas de $z$ ...salvo una. Comparación con las integrales de línea reales: campos conservativos y diferenciales exactas.

El teorema 4.1 nos permite calcular muchas integrales ( $\mathcal{C}$  curva cerrada), por ejemplo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z^n dz &= 0 \quad n \in \mathbb{N} \\ \int_{\mathcal{C}} z^{-n} dz &= 0 \quad n \neq 1, \quad \mathcal{C} \text{ no pasa por el origen} \end{aligned}$$

$$\int_C P(z)dz = 0, \quad P(z) \text{ cualquier polinomio}$$

$$\int_C e^z dz = 0$$

$$\int_C \text{sen}(z)dz = 0$$

**Resultados equivalentes:**

Este resultado tiene su equivalente en Cálculo de varias variables reales, para campos vectoriales y para formas diferenciales:

$Pdx + Qdy$  es exacta (es decir,  $\exists$  una función  $F(x, y)$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$  y  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$  )

$$\Leftrightarrow \int_C Pdx + Qdy \text{ sólo depende de los extremos de } \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow \int_C Pdx + Qdy = 0 \text{ para toda } \mathcal{C} \text{ curva cerrada.}$$

$X = (P, Q)$  es un campo gradiente

$$\Leftrightarrow \int_C X \cdot d\bar{x} \text{ solo depende de los extremos (} X \text{ es } \textit{conservativo})$$

$$\Leftrightarrow \int_C X \cdot d\bar{x} = 0 \text{ para toda } \mathcal{C} \text{ curva cerrada.}$$

Estas son equivalencias entre diversas propiedades, muy importantes desde el punto de la teoría de las formas diferenciales y los campos de fuerzas, pero en la práctica no son muy útiles para verificar si alguna de ellas se cumple en un ejemplo dado. Para esto hay otro criterio que es el siguiente:

$Pdx + Qdy$  es exacta  $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  (es decir, la forma es *cerrada*).

$X = (P, Q)$  es un campo gradiente  $\Rightarrow \textit{rot}X = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$  (es decir, el campo es *irrotacional*).

La diferencia es que este criterio sólo da una condición necesaria, que es suficiente sólo en la vecindad de cada punto o en regiones especiales (sin hoyos), además que requiere que la forma diferencial o el campo tengan parciales continuas. Veamos cómo se expresa este criterio para las funciones complejas:

Si  $f = u + iv$  y suponemos que  $f \in C^1$  como función real ( $u, v \in C^1$ ),  $\gamma(t) = x + iy$ , la integral de línea se desarrolla como:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy$$

Así, para que la integral sólo dependa de los extremos de  $\mathcal{C}$  se requiere que lo mismo suceda para sus partes real e imaginaria y la condición necesaria anterior aplicada a cada parte daría las condiciones:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

¡Que no son otras que las condiciones de Cauchy-Riemann otra vez!

Algo muy curioso está pasando: las condiciones (necesarias y suficientes) para que una función sea derivable resultan ser las mismas que las necesarias para que tenga



primitiva, es decir para que sea "integrable". En la segunda parte de este curso iremos al fondo de esta extraña coincidencia y veremos las enormes repercusiones que tiene para la comprensión de las funciones holomorfas.

Por lo pronto hemos demostrado la implicación correspondiente a las anteriores para el caso complejo:

Si tenemos  $f = u + iv \in C^1$  como función real ( $u, v \in C^1$ ) y

$$\int_C f(z)dz = 0 \text{ para toda curva cerrada } \mathcal{C} \text{ entonces } f \text{ es holomorfa.}$$

Veremos también después que se puede prescindir de la hipótesis  $f \in C^1$ .

Por lo pronto recordemos porque esas condiciones no son suficientes.

Recordemos un ejemplo de campo vectorial que tiene rotacional nulo, pero que no es un campo gradiente:

Sea  $X(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ . Este es un campo vectorial definido en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

(1) ¿Existe  $\Phi$  tal que  $\nabla\Phi = X$  ?

La condición  $rotX = 0$  se cumple, como puede verificar el lector calculándolo. Busquemos entonces  $\Phi$ .

Sean  $A$  y  $B$  dos puntos en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ,  $\alpha$  una parametrización lisa por tramos,  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

tal que  $\alpha(a) = A$  y  $\alpha(b) = B$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} X \cdot d\alpha &= \int_a^b (\frac{-\alpha_2(t)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}) \cdot (\alpha_1', \alpha_2') dt = \int_a^b \frac{\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1'}{\alpha_1^2+\alpha_2^2} dt = \int_a^b \frac{(\frac{\alpha_2}{\alpha_1})'}{1+(\frac{\alpha_2}{\alpha_1})^2} dt = \arctan \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} \Big|_a^b \\ &= \arctan \frac{B_2}{B_1} - \arctan \frac{A_2}{A_1} \end{aligned}$$

$$\Phi(x, y) = \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

(2) Sin embargo, la integral de línea sobre cualquier circunferencia con centro en el origen es distinta de cero; es más:

$$\int_C X \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} (-r\text{sen}\theta, r\text{cos}\theta) (-r\text{sen}\theta, r\text{cos}\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

¿Qué es lo que está pasando?

Que la función  $\Phi$  que obtuvimos no está bien definida para toda  $(x, y) \neq (0, 0)$ . La podemos definir en algún abierto siempre que éste no rodee al origen. Por ejemplo en el semiplano superior. Ahí el campo sí es gradiente. Lo mismo en cualquier otro semiplano. Pero no en todo  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

El problema es que la condición  $rotX = 0$  es una condición *local*: para verificarla en un punto sólo necesitamos conocer lo que pasa en la vecindad de ese punto. Con eso es suficiente para calcular las derivadas parciales de  $X$  y por lo tanto el rotacional. En cambio la condición  $\int_{\gamma} X \cdot d\bar{x} = 0$  para toda  $\gamma$  curva cerrada es una condición *global*: no podemos verificarla alrededor de cada punto, necesitaríamos considerar todas las curvas cerradas, y *todas* incluye hasta las que van a dar una vuelta hasta puntos muy lejanos. Lo mismo, para verificar que  $X$  es un gradiente en una región  $U$  necesitamos construir la función cuyo gradiente sea  $X$  en *toda*  $U$  y no vale en general construirla en pedacitos y

después pegar todos los pedacitos. El resultado puede ser algo que no es una función bien definida en todo  $U$ . El ejemplo anterior nos muestra que lo local y lo global no siempre coinciden.

Para el caso de funciones complejas ya hemos visto el ejemplo  $f(z) = \frac{1}{z}$  función holomorfa definida en  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Si  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  tenemos que:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta = 2\pi i \text{ y por tanto:}$$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

O sea que  $1/z$  es una función holomorfa definida para  $z \neq 0$ , como tal cumple Cauchy- Riemann y, sin embargo, su integral a lo largo de una curva cerrada no es 0 y en consecuencia no tiene primitiva. Pero localmente y en partes adecuadas del dominio sí tiene primitiva:  $\log(z)$  que como sabemos puede definirse en algunos subdominios, como por ejemplo, en  $\mathbb{C} - (\infty, 0]$  (la rama principal) pero no en todo el dominio  $\mathbb{C} - \{0\}$ . En una región así podemos simplemente calcular

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \log(\beta) - \log(\alpha) = \log \frac{\beta}{\alpha} = \log \frac{|\beta|}{|\alpha|} + i(\arg \beta - \arg \alpha)$$

Pero en todo el dominio de  $1/z$  esta fórmula presenta un problema: no en la parte real de la integral ( $\log(|z|)$  está bien definida para  $z \neq 0$ ) pero sí en la imaginaria,  $\arg \alpha$ , que tiene la indefinición que ya conocemos.

Veamos algunos cálculos de este tipo:

Sean  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  como se muestran en el dibujo:

y calculemos las integrales:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{z} dz = \log z \Big|_{-i}^i = \log i - \log(-i) = i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} = \pi i$$

(porque  $\exists F_1(z) = \log z = \log |z| + i \arg z$ ,  $-\pi < \arg z < \pi$ )

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{z} dz = \log z \Big|_i^{-i} = \log(-i) - \log(i) = i\frac{3\pi}{2} - i\frac{\pi}{2} = \pi i$$

(porque  $\exists F_2(z) = \log z = \log |z| + i \arg z$ ,  $0 < \arg z < 2\pi$ ).

Si tenemos una curva como en el dibujo, podemos partirla e integrar, obteniendo la variación del argumento:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 4\pi i \quad (\text{mide cómo va aumentando el argumento})$$

Observemos que la curva le da dos vueltas al origen.

O bien, si recorremos la siguiente curva en el mismo sentido que las manecillas del reloj tenemos:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = -2\pi i$$

Tenemos por conclusión que para toda curva cerrada  $\mathcal{C}$  que no pase por el origen,  $k$  entero:

$$\int_{\mathcal{C}} z^k = 0, \quad k \neq -1$$

$$\int_{\mathcal{C}} z^k = (2\pi i)n \quad k = -1$$

donde el número  $n$  es el número de vueltas que le da la curva el origen. A pesar de esto, en algunos casos es posible demostrar que la integral de una función holomorfa sobre una curva cerrada es 0.

### 4.3. Teorema de Cauchy para el rectángulo

Consideremos un campo vectorial  $X$  definido en una región  $U$  y supongamos que sus componentes tienen derivadas parciales continuas en  $U$ . Supongamos que tenemos un rectángulo cerrado  $R$  contenido en  $U$  y sea  $\partial R$  la frontera de  $R$  orientada en sentido positivo. En esas circunstancias tenemos el Teorema de Green que afirma la integral de línea del campo sobre  $\partial R$  es igual a la integral de superficie del rotacional del campo sobre  $R$ :

$$\int_{\partial R} X \cdot d\bar{x} = \int \int_R \text{rot} X \, dx dy$$

(Existen diferentes versiones del Teorema de Green, pero es fácil ver que todas son equivalentes: para una forma diferencial se formula así:

$$\int_{\partial R} P dx + Q dy = \int \int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

bajo las hipótesis correspondientes).

Si, adicionalmente, suponemos que  $\text{rot} X = 0$ , se puede concluir que la integral de línea de  $X$  sobre la curva cerrada  $\partial R$  es cero.

Aplicando este resultado como antes a las partes real e imaginaria de la integral de una función compleja obtenemos el

**Teorema 4.2 (de Cauchy para el rectángulo)** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f'(z)$  sea continua y sea  $R$  un rectángulo cerrado contenido en  $U$ . Entonces*

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0 .$$

Es claro que la misma conclusión se obtiene si sustituimos el rectángulo por un triángulo, un disco, o cualquier otra región cerrada a la que se pueda aplicar el Teorema de Green. En la segunda parte veremos nuevamente que se puede prescindir de la hipótesis de que  $f'(z)$  sea continua. Este resultado, conocido como Teorema de Cauchy-Goursat será de fundamental importancia para la teoría de las funciones holomorfas.

**Conclusión 4.1** *La afirmación “la integral de una función holomorfa a lo largo de una curva cerrada es cero” es falsa en general. La afirmación es, sin embargo, casi cierta: es cierta para algunas regiones, es cierta cuando la función se comporta bien en la vecindad de los puntos donde no esté definida, es cierta para ciertas curvas cerradas, etc. Todas esas variantes se conocen como “Teoremas de Cauchy”.*

El contraejemplo

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

nos arruina la posibilidad de tener un “Teorema de Cauchy” completamente general sin hipótesis adicionales. Pero el hecho no es tan grave porque es, *en cierto sentido*, el único ejemplo: cualquier otro deberá contener, más o menos escondido a éste.

Pero después veremos que si bien este ejemplo nos quita ese “Teorema de Cauchy” perfecto, nos da por otro lado todos los teoremas fundamentales sobre las funciones holomorfas. Es la llave que nos abre la puerta a un mundo de impresionantes resultados, ninguno de los cuales se podría obtener si la integral anterior fuera 0.

## 4.4. Integración de funciones racionales

### 4.4.1. El Teorema del Residuo (primera versión)

Por lo visto anteriormente podemos calcular fácilmente cualquier integral de un polinomio. Desde la Preparatoria sabemos encontrar primitivas de polinomios. Veremos ahora que también sabemos calcular, en principio, la integral de cualquier función racional. Este hecho tendrá, sorpresivamente, grandes implicaciones que se agrupan en torno al Teorema del Residuo.

Todo se basa en el conocido método de las fracciones parciales, que se basa en la proposición que ya demostramos: *toda función racional se puede escribir como una suma de funciones racionales, cada una de las cuales tiene un solo polo*. Entonces todo se reduce a calcular las integrales de éstas.

Si  $R(z)$  tiene un solo polo, y éste es  $\infty$ , entonces es un polinomio y ya lo sabemos integrar.

Si  $R(z)$  tiene un solo polo  $p \in \mathbb{C}$ , entonces se puede escribir de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-p)^m}$$

donde  $P(z)$  es un polinomio de grado  $\leq m$ . Desarrollándolo en potencias de  $z-p$  obtenemos:

$$R(z) = \frac{a_{-m}}{(z-p)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-p} + a_0.$$

Para integrarla, observemos que todos los términos, salvo el penúltimo, tienen una primitiva bien definida (que es una función racional) en todo  $\mathbb{C} - \{p\}$ . Y el penúltimo tiene como primitiva  $a_{-1} \log(z-p)$  que no está bien definida en todo  $\mathbb{C} - \{p\}$ , pero que ya sabemos como trabajar.

Podemos concluir que la integral de toda función racional se puede expresar como suma de funciones racionales y logaritmos. El principal problema para llevar esto a la práctica consiste en encontrar los polos de la función, lo cual involucra encontrar las raíces del denominador, lo cual es bien sabido que puede ser complicado si su grado es mayor que 2 y más aún si el grado es muy grande.

En el caso de que quisiéramos integrar una función con un sólo polo como la anterior a lo largo de una curva cerrada  $\mathcal{C}$  que no pase por  $p$ , las integrales de todos los términos son cero, salvo la del penúltimo:

$$\int_{\mathcal{C}} R(z) dz = a_{-1} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-p}$$

De toda la función, lo único que necesitamos para calcular la integral es conocer  $p$  y el valor de  $a_{-1}$ . A éste último se le conoce como el *residuo* de  $R(z)$  en el polo  $p$  y lo

denotaremos por  $res(R, p)$ .

Falta sólo calcular la integral de la función  $1/(z - p)$  que, como sabemos, depende sólo del número de vueltas que le da  $\mathcal{C}$  a  $p$ . En ciertos casos es fácil decir cuál es este número, pero necesitamos en general definir bien este concepto. Hay formas geométricas de hacerlo, pero esto requeriría desviarnos mucho. De hecho, podemos invertir los papeles y definir formalmente “el número de vueltas que le da  $\mathcal{C}$  a  $p$ ” en términos de la integral. Este número se llama el *índice de  $\mathcal{C}$*  respecto a  $p$ , se denota por  $n(\mathcal{C}, p)$  y se define así:

$$n(\mathcal{C}, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - p}$$

Con estos conceptos podemos ya enunciar el

**Teorema 4.3 (del Residuo para funciones racionales)**

Si  $R(z)$  es una función racional con polos  $p_1, \dots, p_k$  y  $\mathcal{C}$  es una curva cerrada que no pasa por ninguno de estos polos, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} R(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k n(\mathcal{C}, p_j) res(R, p_j).$$

**Demostración** La demostración ya está hecha: se descompone  $R(z)$  en sus fracciones parciales (funciones con un solo polo) y se realiza el cálculo anterior (ver apéndice D). ■

Nuevamente, en un caso particular, suele ser fácil encontrar los índices  $n(\mathcal{C}, p_j)$ , hay métodos para calcular los residuos  $res(R, p_j)$  y lo más problemático es encontrar los polos.

#### 4.4.2. Cálculo de Integrales reales

Una de las aplicaciones del Teorema del Residuo es calcular integrales reales.

Hay muchas que resultan difícil de calcular, otras que solamente con el teorema del residuo tienen solución.

(i) Empecemos con las integrales de la forma:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

donde  $R$  es una función racional. Interpretamos la integral como una integral compleja como sigue:

Vamos a buscar una función  $f(z)$  que al integrarla sobre el círculo unitario me de la que tenemos. Hacemos:

$$z = e^{i\theta}$$

$$dz = iz d\theta$$

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \operatorname{sen} \theta &= \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \\ \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta &= -i \int_{|z|=1} \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{z} dz\end{aligned}$$

la integral compleja la resolvemos con el teorema del residuo. Tenemos que garantizar que no hay polos en el círculo.

(ii) Integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

Las condiciones para que exista la integral son:

$R$  función racional que no tenga polos reales y que el grado del denominador sea mayor o igual al grado del numerador más dos, es decir,  $|R(z)| \leq \frac{k}{|z|^2}$  para  $z$  suficientemente grande, cumpliéndose también para toda  $x$ . La función racional compleja tiende a cero como  $\frac{1}{x^2}$ .

Bajo estas condiciones se cumple que,

$$\left| \int_0^b R(x) dx \right| \leq \left| \int_0^1 R(x) dx \right| + \left| \int_1^b R(x) dx \right| \leq \alpha + k\left(1 - \frac{1}{b}\right) < \infty$$

por tanto existen los dos límites siguientes:

$$\int_0^{\infty} R(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b R(x) dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^0 R(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 R(x) dx,$$

y existe  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ .

Consideremos la curva  $\mathcal{C}_r$  formada por el intervalo  $[-r, r]$  y  $(s_r)$  el semicírculo de radio  $r$ .

Como  $R(x)$  es una función racional real que no tiene polos en  $\mathbb{R}$ , los polos quedan dentro de la curva. Calculamos la integral sobre  $\mathcal{C}_r$ :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_r} R(z) dz &= 2\pi i \left( \sum_{\substack{z_i \text{ polo } R \\ \operatorname{Im}(z_i) > 0}} \operatorname{Res}(R, z_i) \right) \\ \int_{\mathcal{C}_r} R(z) dz &= \int_{-r}^r R(x) dx + \int_0^{\pi} R(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta\end{aligned}$$

haciendo tender  $r$  a infinito tenemos que,

$$\left| \int_0^\pi R(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |R(re^{i\theta})| r |d\theta| \leq \int_0^\pi \frac{k}{r^2} r |d\theta| = \frac{k}{r} \pi \rightarrow 0$$

y por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \left( \sum_{\substack{z_i \text{ polo } R \\ \text{Im}(z_i) > 0}} \text{Res}(R, z_i) \right).$$

El Teorema del Residuo también es válido para funciones que no sean racionales.



# Apéndice A

## Teorema (Bolzano-Weierstrass):

**Teorema A.1** (*Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos*)

*Todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto de acumulación.*

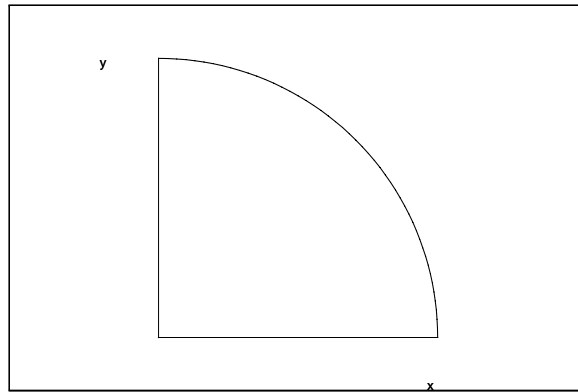
**Teorema A.2** (*Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones*)

*Toda sucesión acotada en  $\mathbb{C}$  tiene al menos una subsucesión convergente.*

# Apéndice B

## Teorema Fundamental del Algebra

**Teorema B.1** *Todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz compleja*



Buscaremos un  $h$  complejo tal que cumpla  $|p(z_0 + h)| < |p(z_0)|$ .

$$p(z_0 + h) = a_n(z_0 + h)^n + a_{n-1}(z_0 + h)^{n-1} + \dots + a_0$$

haciendo las operaciones binomiales y agrupando tenemos

$p(z_0 + h) = p(z_0) + b_n h^n + \dots + b_k h^k$ , donde  $k$  es la potencia más chica que aparece (puede ser igual a uno)

$$\begin{aligned} p(z_0 + h) &= p(z_0) + b_k h^k + b_{k+1} h^{k+1} + \dots + b_n h^n \\ &= p(z_0) + b_k h^k + b_k h^k \left( \frac{b_{k+1}}{b_k} h + \dots + \frac{b_n}{b_k} h^{n-k} \right) \end{aligned}$$

Llamemos  $\alpha = b_k h^k$

$$\beta = b_k h^k \left( \frac{b_{k+1}}{b_k} h + \dots + \frac{b_n}{b_k} h^{n-k} \right)$$

$p(z_0 + h)$  es el vector resultante de sumar  $p(z_0)$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ . Veamos qué condiciones podemos pedir para  $h$ :

i) si  $|\alpha| < |p(z_0)|$  y  $\arg \alpha = \arg p(z_0) + \pi$  ( $\arg \alpha = \arg b_k + k \arg h$ )

entonces el vector  $\alpha$  tiene dirección opuesta al vector  $p(z_0)$

ii) si  $|\beta| < |\alpha|$

$$\left| b_k h^k \left( \frac{b_{k+1}}{b_k} h + \dots + \frac{b_n}{b_k} h^{n-k} \right) \right| = |b_k| |h|^k \left| \left( \frac{b_{k+1}}{b_k} h + \dots + \frac{b_n}{b_k} h^{n-k} \right) \right| \leq$$

$$|b_k| |h|^k \left( \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} h \right| + \dots + \left| \frac{b_n}{b_k} h^{n-k} \right| \right) < |b_k| |h|^k = |\alpha|,$$

si se cumple  $\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| |h| + \dots + \left| \frac{b_n}{b_k} \right| |h|^{n-k} < 1$ .

Si  $|h|$  es suficientemente pequeño para que se cumpla i) y ii) con

$$\arg h = \frac{\arg p(z_0) + \pi - \arg b_k}{k}$$

entonces  $h \in \mathbb{C}$  tal que  $|p(z_0 + h)| < |p(z_0)|$ .

Por tanto  $p(z) = 0$  para algún  $z \in \mathbb{C}$ .

# Apéndice C

## Geometría real con notación compleja

Si  $P(z)$  es un polinomio complejo, entonces la ecuación  $P(z) = 0$  se cumple únicamente por un número finito de puntos del plano. Por lo tanto, si queremos encontrar la ecuación de una curva en notación compleja, tenemos que incluir otras funciones, como por ejemplo  $\bar{z}$ .

Por ejemplo la ecuación  $z\bar{z} = 1$  nos representa el círculo unitario, la ecuación  $z - \bar{z} = 0$  nos representa el eje real, etc.

De hecho, cualquier ecuación de una curva plana dada por un polinomio real  $P(x, y) = 0$  se puede escribir en términos complejos mediante la substitución

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Así podemos, en principio, rehacer toda la geometría analítica plana en función de la variable compleja  $z$ . En ocasiones esto puede simplificar los cálculos.

Ecuación de la recta: Si tenemos la recta  $ax + by + c = 0$  con  $a, b$  reales, la substitución nos da

$$a\frac{z + \bar{z}}{2} + b\frac{z - \bar{z}}{2i} + c = 0$$

o sea

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right)z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2i}\right)\bar{z} + c = 0$$

y llamando  $\alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2i}$  tenemos:

La ecuación de una recta en  $\mathbb{R}^2$  es de la forma

$$\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$$

donde  $\alpha \in \mathbb{C}$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

A la misma conclusión se puede llegar mediante un argumento geométrico:

Si  $\alpha$  es un vector unitario perpendicular a la recta  $l$ , entonces  $p \in l$  es equivalente a la condición  $p \cdot v = d$ , con  $d$  una constante.

En notación compleja  $p = z$ ,  $v = \alpha$ . (Pero recordemos que  $p \cdot v = \operatorname{Re}(\alpha z)$ ), y la ecuación nos queda

$$\operatorname{Re}(\alpha z) = d$$

ó

$$\alpha z + \overline{\alpha z} - 2d = 0 \quad (d \in \mathbb{R})$$

con lo cual obtenemos una interpretación geométrica de los parámetros.

#### Ecuación de un círculo

La ecuación general de un círculo es aún más sencilla: el círculo de centro  $a$  y radio  $r$  se escribe como

$$|z - a| = r$$

ó

$$(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = r^2$$

ó

$$z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + a\overline{a} - r^2 = 0$$

**Ejercicio C.1** Si en la ecuación anterior suprimimos el término  $z\overline{z}$  obtenemos la ecuación de una recta. ¿Qué tiene que ver esta recta con el círculo?

#### *Semejanza de triángulos*

Recordamos la condición para que dos triángulos sean semejantes: Existe una semejanza que mande el triángulo  $z_0 z_1 z_2$  en el  $z'_0 z'_1 z'_2$  (en ese orden)

si, y sólo si los ángulos  $\theta, \theta'$  son iguales y sus lados adyacentes son proporcionales. O sea

$$\begin{aligned}\theta &= \theta' \\ \frac{|z_2 - z_0|}{|z_1 - z_0|} &= \frac{|z'_2 - z'_0|}{|z'_1 - z'_0|}\end{aligned}$$

$\theta = \arg(z_2 - z_0) - \arg(z_1 - z_0) = \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$  y análogamente para  $\theta'$ .  
Luego las dos ecuaciones anteriores se expresan en una sola:

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{z'_2 - z'_0}{z'_1 - z'_0}$$

que expresan en forma compacta las condiciones para la semejanza.

# Apéndice D

## Fracciones Parciales

En cálculo integral es de gran utilidad descomponer una función racional en “fracciones parciales”, es decir como una suma de funciones racionales, cada una de las cuales tiene un único polo. Demostraremos aquí que esto siempre se puede hacer:

$$\text{Sea } R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Empezaremos por demostrar

**Lema 1:**

Si  $p$  es un polo de  $R(z)$ , podemos separar  $R$  como una suma

$$R(z) = R_1(z) + R_2(z)$$

donde  $p$  es el único polo de  $R_1$  y  $p$  no es polo de  $R_2$  (y en consecuencia,  $R_2$  debe tener todos los demás polos de  $R$ ).

Veamos algunos casos:

Caso  $p = \infty$  : Es el caso más fácil. Si  $\infty$  es polo de  $R$ , eso quiere decir que el grado de  $P$  es mayor que el grado de  $Q$ . Entonces podemos aplicar el algoritmo de la división y escribir

$$P(z) = A(z)Q(z) + B(z)$$

donde  $A$  y  $B$  son polinomios, el grado de  $B$  es menor que el grado de  $Q$ . De donde

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = A(z) + \frac{B(z)}{Q(z)}$$

Como  $A(z)$  es polinomio, su único polo es  $\infty$ . Y por ser grado  $B <$  grado  $Q$ ,  $B(z)$  no tiene polo en  $\infty$ , y hemos logrado la descomposición.

Caso  $p \neq \infty$  polo simple: En este caso  $Q(p) = 0$  y  $Q(z) = (z-p)Q_1(z)$  con  $Q_1(p) \neq 0$ . Luego podemos tratar de descomponer, como en los cursos de cálculo integral

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-p)Q_1(z)} = \frac{a}{z-p} + \frac{B(z)}{Q_1(z)}$$

donde  $a$  y  $B$  son una constante y un polinomio por determinar como sigue:

$$\frac{a}{z-p} + \frac{B(z)}{Q_1(z)} = \frac{aQ_1(z) + B(z)(z-p)}{(z-p)Q_1(z)}.$$

Entonces  $a$  y  $B(z)$  deben cumplir

$$P(z) = aQ_1(z) + B(z)(z-p)$$

Haciendo  $z = p$  obtenemos  $P(p) = aQ_1(p)$ , o sea

$$a = \frac{P(p)}{Q_1(p)}.$$

y

$$B(z) = \frac{P(z) - aQ_1(z)}{z-p}$$

el cual es un polinomio, ya que el numerador se anula en  $z = p$ , y por lo tanto es divisible entre  $z - p$ .

Podemos continuar viendo como descomponer un polo doble, triple, etc. Pero hay una manera más rápida de hacerlo, reduciendo al caso  $p = \infty$ .

Caso general: Si  $p \neq \infty$  es polo de  $R(z)$ , tomemos una función de Möbius  $M$  que mande  $p$  a  $\infty$  (por ejemplo  $M(z) = \frac{1}{z-p}$ ). Entonces  $M^{-1}$  manda  $\infty$  en  $p$  y  $R(M^{-1}(w))$  tiene un polo en infinito. Por el primer caso:

$$R(M^{-1}(w)) = R_1(w) + R_2(w)$$

donde  $R_1$  tiene el  $\infty$  como único polo y  $R_2$  no tiene polo en  $\infty$ . Pero entonces, haciendo  $w = M(z)$

$$R(z) = R_1(M(z)) + R_2(M(z))$$

y  $R_1(M(z))$  es una función racional cuyo único polo es  $p$  y  $R_2(M(z))$  es una función racional que no tiene polo en  $p$ .

Así el lema queda demostrado en general (y sin hacer muchas cuentas).

Mediante el Lema 1 podemos ir descomponiendo uno a uno los polos de la función  $R$  y escribir, si  $p_1, \dots, p_k$  son los polos de  $R$ ,

$$R(z) = R_1(z) + \dots + R_k(z)$$



Donde cada  $R_i(z)$  es una función racional cuyo único polo es  $p_i$ . ✓

**Ejercicio D.1** *Encontrar explícitamente la descomposición para el caso de un polo doble.*

**Ejercicio D.2** *Demostrar que en la descomposición de  $R(z)$  las fracciones parciales quedan únicamente determinadas salvo constantes. (Sugerencia: Empezar por el Lema).*

# Apéndice E

## Geometría hiperbólica

Ahora estudiemos las transformaciones de Möbius que van del disco  $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$  al disco  $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$

$$\mathcal{D} = \{T : \Delta \rightarrow \Delta, T \text{ Transformación de Möbius}\}$$

Las rotaciones del disco serían un caso, aquí el centro va al centro.

Lo interesante está en si es posible que un punto distinto del cero vaya al cero,  $T(u) = 0$ . La respuesta es que sí, y resulta que el conjunto  $\mathcal{D}$  es un subgrupo.

De todas las  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  construimos una tal que mande el punto  $u$  al cero.

Supongamos que el punto  $u$  está en el eje real:

Trazamos una recta que pase por  $-1, 0, u$  y  $1$ , sabemos que existe una  $T$  que mande  $-1 \rightarrow -1, u \rightarrow 0$  y  $1 \rightarrow 1$ , y es  $T(z) = \frac{z-u}{1-uz}$

De igual manera se puede obtener  $T$  si  $u$  no es real, sino cualquier punto en el disco, trazamos la recta que pasa por él y el cero, tendríamos otros dos puntos en el círculo  $z_1$  y  $z_2$ .

Y se busca la transformación que  $u \rightarrow 0, z_1 \rightarrow z_1$  y  $z_2 \rightarrow z_2$ .

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z-u}{1-uz} \text{ con } u \in \Delta$$

Ésta  $T$  es del conjunto  $\mathcal{D}$  porque la recta que pasa por los puntos  $z_1$  y  $z_2$ , va a la recta que pasa por los puntos  $T(z_1) = z_1$  y  $T(z_2) = z_2$ , y también va a tener a los puntos imagen del  $0$  y  $u$ .

Observemos que se conserva el ángulo recto formado por el círculo y la recta en los puntos  $z_1$  y  $z_2$  y el círculo va a dar al círculo, ( $|T(z)| = 1$ , si  $|z| = 1$ ).

**Teorema E.1** Si  $z_1, z_2 \in \Delta = \{z \mid |z| < 1\}$  (Disco unitario) ( $z_1 \neq z_2$ )

Entonces existe un único círculo ortogonal al círculo unitario  $C = \{z \mid |z| = 1\}$  que pasa por  $z_1$  y  $z_2$ .

**Demostración** Sea  $T$  transformación de Möbius tal que  $T(C) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y  $T(\Delta) = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$

Tomemos tres puntos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  en el círculo y los mandamos a el 0, 1 e  $\infty$  respectivamente .

$$S(\alpha) = 0, S(\beta) = 1 \text{ y } S(\gamma) = \infty$$

La imagen del disco puede ir al semiplano superior o inferior (pero la imagen está de un mismo lado). Para tener el semiplano superior podemos tomar  $T = S, T = -S$ .

las imagenes de  $z_1$  y  $z_2$  estarán en el semiplano, demostraremos que existe un único círculo ortogonal al eje real que pasa por ellos.

Con la inversa (que ya sabemos que existe) regresamos al disco y tenemos que se cumple el teorema.

Construimos el círculo: el centro es el punto de intersección de la recta  $L$  y el eje real , donde la recta  $L$  es la bisectriz del segmento formado por los puntos  $T(z_1)$  y  $T(z_2)$ , y por lo tanto el radio es la distancia del centro al punto  $T(z_1)$  o  $T(z_2)$ .

Tenemos que por construcción el círculo es el único ortogonal al eje real . Cuando los puntos imagen están en la misma vertical, el círculo ortogonal es la recta vertical (círculo de radio infinito)

Existen muchas transformaciones de Möbius que mandan el disco en el semiplano superior, podemos construir una:

$$-1 \rightarrow 0$$

$$i \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow \infty$$

$S(z) = i \frac{z+1}{z-1}$ , como  $S(0) = -i$ , el disco va al semiplano inferior, así que la que buscamos es  $T(z) = -S(z)$

Nuestra transformación cumple todas las propiedades que hemos visto. ✓ ■

Por tanto estas transformaciones del disco en el disco mandan círculos ortogonales en círculos ortogonales.

Llamémosle “recta” al círculo ortogonal que pasa por  $z_1$  y  $z_2$ , y “puntos” a los puntos del disco

Tenemos que:

- i) Dados dos “puntos” existe una “recta” que pasa por ellos
- ii) Dado un “punto”  $p$  exterior a una “recta”  $l$ , existen muchas “rectas” que pasan por  $p$  y no tocan a  $l$ .

Como vemos, tenemos en el punto (ii) la negación al quinto postulado de la geometría euclidiana.

Con estas denominaciones podemos hacer mucha geometría, la *geometría de Lobachevski*.

Sólo falta llamarle al disco “Plano de Lobachevski”. A las transformaciones de Möbius se les considera los movimientos del “Plano de Lovachevski”. Se puede también definir una “distancia” entre dos puntos  $p, q$  como la razón cruzada  $(p', p, q, q')$  donde  $p', q'$  son los puntos donde la “recta” que pasa por  $p, q$  intersecta al borde. Entonces las transformaciones de  $\mathcal{D}$  preservan la distancia. (Isometrías de disco)

Fué N.I. Lobachevski quien demostrara la posibilidad de una geometría distinta (no euclidiana). Después muchos matemáticos desarrollaron modelos geométricos para estudiar la geometría de Lobachevski.

# Bibliografía

- [1968] Carl B. Boyer. Historia de la Matemática. Alianza Editorial, Madrid, 1986, El Renacimiento pp.362.
- [1972] Morris Kline. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I. Alianza Editorial, Madrid, 1992, pp.339.
- [1972] Morris Kline. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, II. Alianza Editorial, Madrid, 1992, pp.547
- [1989] John Stillwell. Mathematics and Its History. Springer-Verlag New York, 1989, pp.190-191.
- [1966] Lars V. Ahlfors. Complex Analysis. Second edition. McGraw-Hill. Tokyo
- [1990] H.D.Ebbinghaus. H.Hermes. F.Hirzebruch. M.Koecher. K.Mainzer. J.Neukirch. A. Prestel. R.Remmert. Numbers. Springer-Verlag.
- [1991] Bruce P.Palka. An Introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag.
- [1999] Remmert, R. Theory of Complex Functions. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag.