Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
UNAM

NOTAS
DE
ANALISIS MATEMATICO

Dr. Joaquín Curiel

PREFACIO

En el capítulo 0, se demuestra que el sistema de los reales es un campo ordenado, completo.

En el capítulo I, se presenta primeramente, uno de los ejemplos más importantes de espacio métrico, el espacio lineal normado.
En la sección 1, presentamos el concepto de espacio lineal sobre el campo de los reales, y algunos ejemplos.
En la sección 2, introducimos la definición de espacio lineal normado.
En la sección 3, definimos el concepto de espacio con producto interno, el cual es un caso particular muy importante de espacio lineal normado.
n espacio con producto interno que tiene dimensión finita es un **espacio euclidiano** y un espacio con producto interno de dimensión infinita es un **espacio de Hilbert.**
En la quinta y última sección, se introduce la noción de métrica o distancia en un espacio lineal normado.

En el capítulo II, estudiamos los espacios métricos.
En la sección 1 del capítulo II, damos la definición de espacio métrico y presentamos algunos ejemplos.
En la sección 2, se estudian algunas propiedades de espacios métricos curvos
En la sección 3, se estudian los conjuntos abiertos.
En la sección 4, estudiamos algunas propiedades de los conjuntos cerrados.
En la sección 5, se demuestra el teorema de celdas nidificadas, el cual afirma que la intersección de una sucesión decreciente de intervalos cerrados, no vacíos, es no vacía.
En esta misma sección demostramos el teorema de Bolzano-Weierstrass, que afirma que todo conjunto infinito y acotado de números reales, tiene un punto de acumulación.
En la sección 6, se estudian los conjuntos compactos, en un espacio métrico. Todo conjunto compacto es cerrado y acotado. Un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, es compacto.
En la sección 7, se estudian los conjuntos compactos de números reales. El teorema principal de esta sección es el teorema de Heine-Borel, el cual afirma que un conjunto de números reales es compacto, si y sólo si, es cerrado y acotado.
Una consecuencia importante del teorema de Heine-Borel, es el teorema de intersección de Cantor.
En la sección 8, se estudian los conjuntos conexos

En el capítulo III, estudiamos la convergencia de una sucesión en un espacio métrico, y definimos el concepto de espacio métrico completo.

En la sección 1, se estudian las sucesiones en un espacio métrico

En la sección 2, consideramos las sucesiones en un espacio lineal normado. Se demuestra que toda combinación lineal de sucesiones convergentes es convergente y que el producto interno de dos sucesiones convergentes es convergente.

En la sección 3, introducimos el concepto de sucesión acotada en un espacio lineal normado.

En la cuarta sección se estudian las sucesiones convergentes.

En la quinta sección se estudian las sucesiones de Cauchy.

En la sexta sección se estudian los espacios de Banach, es decir, los espacios lineales normados completos.

En la sección 7, se demuestra que el espacio de los reales **R,** es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy de números reales, es convergente.

En la sección 8, se estudian los espacios métricos completos .

En la sección 9, estudiamos el comportamiento de los puntos fijos en un espacio métrico completo.

En el capítulo IV se estudia el concepto de función continua.

En la sección 1 estudiamos las propiedades de la funciones continuas en un espacio métrico

En la sección 2, estudiamos la continuidad de funciones definidas en espacios lineales normados.

En la sección 3 presentamos algunas propiedades de las funciones lineales.

En la sección 4, estudiamos la continuidad de las funciones reales. Una función real continua sobre un conjunto compacto, es acotada y toma sus valores extremos (máximo y mínimo).

En la sección 5, estudiamos la continuidad uniforme de las funciones definidas en espacios métricos. Toda función real continua sobre un conjunto compacto es uniformemente continua

En el capítulo V estudiamos algunas propiedades de las derivadas de las funciones diferenciables reales definidas en un intervalo de la recta real. La suma y el producto de dos funciones diferenciables, son funciones diferenciables. Toda función diferenciable es continua.Se demuestran tres versiones del teorema del valor medio, en particular el teorema de Rolle.Se definen las derivadas de orden superior y demostramos el teorema de Taylor.

En el Capítulo VI se estudian algunas propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes.
En la primera sección se define la integral, se demuestra que toda función continua sobre un intervalo compacto es integrable, y que toda combinación lineal de funciones integrables es una función integrable.
En la segunda sección se definen las integrales superior e inferior de una función acotada, y se demuestra que las integrales inferior y superior de una función acotada son iguales si y sólo si la función es integrable.
El resultado más importante de esta sección es el criterio de integrabilidad de Riemann.

En el Capítulo VII, estudiamos las sucesiones de funciones. Se definen la convergencia puntual y la convergencia uniforme . La convergencia uniforme preserva la continuidad del límite, es decir, el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas , es una función continua.
El teorema de Arzela- Ascoli caracteriza los conjuntos compactos de funciones continuas.

En el capítulo VIII, estudiamos la diferencial de una función real de varias variables.

En el capítulo IX, estudiamos las funciones diferenciables cuyo dominio y codominio son espacios lineales normados. Toda combinación lineal de funciones diferenciables, es diferenciable. Además, la compuesta de dos funciones diferenciables, es diferenciable, y la diferencial de la compuesta, es igual a la compuesta de sus diferenciales (Regla de la Cadena).
Se demuestran el teorema del valor medio. Se definen las diferenciales de orden superior y se demuestra el teorema de Taylor.

CONTENIDO

0.- El Sistema de los Números Reales
1.- Campos Ordenados Completos

I.- Espacios Lineales Normados
1.-Espacios Lineales
2.-Espacios Lineales Normados
3.-Espacios con Producto Interno
4.-Ejemplos.
5.-Métricas sobre Espacios Lineales Normados

II.- Espacios Métricos
1.- Definiciones y Ejemplos
2.- Espacios Métricos Curvos
3.- Conjuntos Abiertos
4.- Conjuntos Cerrados, Acotados y Totalmente Acotados
5.- Celdas Nidificadas. Teorema de Bolzano-Weierstrass
6.- Conjuntos Compactos.
7.- Compacidad en los Reales. Teorema de Heine- Borel. Teorema de Intersección de Cantor.
8.- Conjuntos Conexos

III.-Sucesiones en un Espacio Métrico
1.- Sucesiones en un Espacio Métrico
2.- Sucesiones en un Espacio Lineal Normado
3.- Sucesiones Acotadas
4.- Sucesiones Convergentes
5.- Sucesiones de Cauchy.
6.- Espacios de Banach
7.- Sucesiones de Números Reales
8.- Puntos Fijos. Teorema de Banach

IV.- Funciones Continuas en Espacios Métricos

1.- Funciones Continuas con Valores en un Espacio Métrico
2.- Funciones Continuas en un Espacio Lineal Normado
3.- Funciones Lineales
4.-Funciones Reales Continuas
5.- Continuidad Uniforme

V.- Diferenciación de Funciones Reales de una Variable Real

1.- Derivada de una Función
2.- Composición de Funciones. Regla de la Cadena
3.- Valores Extremos de una Función
4.- Teoremas del Valor Medio
5.- Derivadas de Orden Superior.Teorema de Taylor

VI.- Integral de Riemann- Stieltjes

1.- Definición de la Integral de Riemann- Stieltjes
2.- Integrales Superior e Inferior.Criterio de Integrabilidad de Riemann.
3.-Operaciones con Funciones Integrables
4.- Sucesiones de Funciones Integrables

VII.- Sucesiones de Funciones

1.- Sucesiones de Funciones en un Espacio Lineal Normado
2.- Convergencia Puntual
3.- Sucesiones Acotadas
4.- Sucesiones de Cauchy
5.- Convergencia Uniforme
6.- Sucesiones Uniformemente Acotadas
7.- Sucesiones Uniformemente de Cauchy
8.- Funciones Acotadas
9.- El Espacio de Banach C(X).
10.- Compacidad en C(X).Teorema de Arzela-Ascoli

VIII.- Diferenciación de Funciones Reales de Varias Variables

1.- Derivadas Parciales
2.- Derivadas Direccionales
3.- Funciones Reales Diferenciables
4.- Teorema del Valor Medio
5.- Diferenciales de Orden Superior
6.- Extremos de una Función
7.- Criterio de la Segunda Derivada

IX.- Diferenciación de Funciones Vectoriales de Varias Variables

1.- Diferenciabilidad
2.- Derivadas Direccionales
3.- La Diferencial en $\mathbf{R}^m$
4.- Composición de Funciones. Regla de la Cadena
5.- Teorema del Valor Medio

Bibliografía.

0 .- El Sistema de los Números Reales

El sistema de los números reales , es un campo ordenado, en el cual está definida una norma (módulo ó valor absoluto) de un número.

Vamos a postular la existencia de un conjunto no vacío U, llamado el **universo U**.
Todos los conjuntos que vamos a considerar estan contenidos en U.

Un conjunto S está **contenido, ó es un subconjunto del** conjunto T, si cada elemento x de S pertenece a T.
Escribimos $S \subset T$.

1.-Proposición a relación de inclusión tiene las siguientes propiedades

Reflexividad $\quad A \subset A.$

Transitividad $\quad \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset C \end{array} \Rightarrow A \subset C.$

Demostración Sea x un elemento de A,por hipótesis a B, luego x B.
Pero B C, por hipótesis , lugo, x C.

Qed

Dos conjuntos A,B son **iguales** si $A\subset B$ y $B \subset A$.

2.-**Proposición** La igualdad de conjuntos es una relación de equivalencia.
Es decir

Es reflexiva $A=A$

Es simétrica $A=B$ $B=A$.

Es transitiva $\begin{array}{l} A=B \\ B=C \end{array} \Rightarrow A=C.$

El conjunto sin elementos , es el **conjunto vacío** y se denota por .

Conjuntos Ordenados

Un orden en el conjunto no vacío A, es una relación denotada por $<$ que tiene las dos siguientes propiedades
i) Si x,y son dos elementos en A,entonces vale una y sólo una de las siguientes proposiciones

Tricotomía $\quad x<y, \quad x=y, \quad y<x$.

Transitividad $\quad$ Para tres elementos x,y, z de A, vale que
$x<y$ implica que $x<z$.
$y<z$

La relación $x<y$ se lee x menor que y.Tambien escribimos $y>x$ que se lee y es mayor que x.
La notació x   y, significa que x es menor ó igual que y.
Un conjunto A es **ordenado si hay un orden definido** en A.

Ejemplos

1- El conjunto **N** = { 1,2,3…} de los números naturales está ordenado por la relación $x<y$ si $y-x>0$.
2- El conjunto **Q** de los números racionales está ordenado por la relación $x<y$ si $y-x>0$.

Un conjunto ordenado A, está **acotado superiormente si** existe un elemento M en el universo U, tal que

$$x < M,$$

para todo elemento x de A.El elemento M es cota superior de A.
Un elemento M es una **cota superior mínima** del conjunto ordenado A, si

i) M es cota superior de A.
ii) Si $z < M$ entonces z no es cota superior de A.

Campos

Un **campo** F es un conjunto no vacío en el cual estan definidas dos operaciones binarias A: FxF $\rightarrow$ F, M: FxF $\rightarrow$ F, llamadas **adición y multiplicación** respectivamente, que tienen las siguientes propiedades

Axiomas de la Adición

La adición A(x,y) = x+y, es
1) asociativa $\quad a+(b+c) = (a+b)+c$, a,b.c en F.
2)Conmutativa $\quad a+b = b+a$, a,b en F.

3).- F contiene un elemento 0 (llamado cero) tal que a+0 = 0+a, a en F.
4) Cada elemento a de F tiene un **simétrico** -a tal que

$$a + (-a) = 0$$

Axiomas de la Multiplicación

La multiplicación M(x,y) = xy, es
Asociativa a(bc) = (ab)c.
Conmutativa ab = ba.
F contiene un elemento 1diferente de 0, llamado **uno** tal que (a)(1)= a .
Cada elemento a diferente de 0, tiene un **inverso multiplicativo** a , tal que

$$a^{-1} a = aa^{-1} =1.$$

La multiplicación es distributiva con respecto a la adición

$$a(b +c) = ab + ac.$$

El Campo de los Reales

Teorema Existe un campo ordenado **R,** con la propiedad de la mínima cota superior.Este campo contiene al campo **Q** de los números racionales.

I.-Espacios Lineales Normados

1.- **Definición de un Espacio Lineal Normado**

En esta sección presentaremos la definición de un ejemplo muy importante de espacio métrico, el espacio vectorial normado y daremos algunos ejemplos importantes de tales espacios.

Definición Un **espacio lineal ó espacio vectorial**, sobre el campo de los reales **R**, es un conjunto no vacío V,(cuyos elementos vamos a llamar **puntos o vectores**) en el cual están definidas dos operaciones, llamadas **adición y multiplicación** de escalares por vectores, con las siguientes propiedades:

i) El espacio vectorial V, forma un grupo abeliano (conmutativo), con respecto a la adición.Es decir, la adición es
asociativa
(1.1) $v+(w+z) = (v+w)+z$, v,w,z en V.
conmutativa
(1.2) $v+w = w+v$, v,w en V
tiene una identidad, es decir, existe un vector 0,llamado el vector **cero,** tal que
(1.3) $v + 0 = 0 + v = v$, para todo v en V.

simétrica, es decir, para cada vector v, existe un vector –v,(llamado el **simétrico de v)** tal que
(1.4) $v + (-v) =0$
ii) la multiplicación de escalares por vectores, es
asociativa
(1.5) $a(bv) = (ab)v$, a,b en **R**, **v** en V**.**
con identidad
(1.6) $1v = v$, v en V,
distributiva
(1.7) $(a+b)v = av+bv$, a,b en **R** ,v en V,

(1.8) $a(v+w) = av+aw$, a en **R**, v,w en V.

2.-Espacios Lineales Normados

Definición Una **norma** sobre un espacio vectorial V, es una función real, n $:V\rightarrow$ **R,** que tiene las siguientes propiedades :
La norma es no- negativa

(2.1) i) $n(v) \geq 0$,

La norma de un vector es cero , sí y sólo sí, el vector es cero.

(2.2) ii) $n(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$

La norma del producto de un escalar a ε **R** y un vector,v ε V es igual al producto del módulo del escalar, y la norma de un vector.

(2.3) iii) $n(av) = |a|\, n(v)$,

La norma de la suma de dos vectores es menor ó igual que la suma de sus normas

(2.4) iv) $n(v+w) \leq n(v) + n(w)$.

Definición Un espacio vectorial **normado** es una pareja (V, n) formada por un espacio vectorial V y una norma n sobre V.

3.-Espacios con Producto Interno

Una **funcional bilineal** sobre el espacio lineal normado V, es una función real $f : VxV \rightarrow$ **R,** que cumple la siguiente condición:

(3.1) $f(av + bw, z) = a\, f(v, z) + b\, f(w, z)$,
a,bε **R**, v, w, z ε V.
$f(v, aw + bz) = a\, f(v,z) + b\, f(w,z)$,

La funcional bilineal $f : VxV\rightarrow$ **R** es **simétrica** si

(3.2) $f(v,w) = f(w,v)$, v,w V.

La funcional bilineal f es **definidamente positiva** ,si

(3.3) $f(v,v) \geq 0$, v ε V,
y
(3.4) $f(v,v) = 0$ si y sólo si $v=0$.

Una función bilineal es **negativamente definida** si
(3.5) $f(v,v) \leq 0$
y
(3.6) $f(v,v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Sea u_i , i = 1,2,..n una base del espacio lineal de dimensión n.Entonces el vector v ε V, admite la representación

(3.7) $$v = \sum_i v_i u_i,$$

luego

(3.8) $$f(v,v) = \sum_{ij} a_{ij} v_i v_j , \text{ donde } a_{ij} = f(u_i , u_j).$$

La matriz $A = [a_{ij}]$, es la **matriz de** la **funcional bilineal** f.

Un **<u>producto interno</u>** sobre un espacio vectorial V, es una funcional bilineal f: $VxV \to \mathbf{R}$, simétrica y positivamente definida.

Un **<u>espacio con producto interno</u>** es una pareja (V, f), formada por un espacio vectorial V y un producto interno f .
Todo espacio con producto interno tiene una norma n: $V\to \mathbf{R}$, definida como la raíz cuadrada del producto interno del vector por si mismo.

(3.5) $$n(x)=\| \mathbf{x} \| = f(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}.$$

En un espacio con producto interno, vale la desigualdad de Schwartz. El módulo del producto interno de dos vectores, es menor ó igual que el producto de sus normas.

(3.6) $$| x.y | \leq n(x)n(y).$$

4.-**Ejemplos**
De nuestra experiencia con los cursos de Álgebra Lineal, sabemos que los siguientes espacios son espacios vectoriales normados.

4.1 **Ejemplo**. El espacio de los reales $(\mathbf{R}, |\ |)$ con el valor absoluto como norma **.**

4.2 **Ejemplo** El espacio C[a,b], formado por las funciones reales continuas definidas en el intervalo cerrado [a, b] y la norma uniforme

(4.1) $$n(f) = \sup \{ | f(x) | , x \in [a,b].\}.$$

4.3 **Ejemplo** El espacio de Lebesgue L_2 [a,b] formado por funciones reales definidas en [a,b],cuyos cuadrados <u>son integrables.</u> y la norma

(4.2) $$n(f) =(\int f^2(x)\, dx)^{1/2} , \qquad f \in L_2[a,b]$$

El siguiente ejemplo, el espacio de las variables aleatorias con variancia finita, es muy importante en Actuaría, Estadística y Probabilidad. En este ejemplo, vamos a suponer que se tienen conocimientos de Probabilidad I.

4.4 **Ejemplo El Espacio de las Variables Aleatorias, con Variancia Finita.** Sea (Ω , Σ , P), un espacio con una medida de probabilidad, es decir, una tercia formada por un conjunto no vacío Ω , llamado el **espacio muestral,** un σ – campo Σ, y una medida de probabilidad P: $\Sigma \to$ **R.**
Una variable aleatoria, es una función medible X : $\Omega \to$R.
La esperanza de X, es la integral de Lebesgue de X**, y el segundo momento de X,**la integral de Lebesgue de X^2 .

(4.3) $$E(X) = \int X\, dP, \quad E(X^2) = \int X^2 dP.$$

Denotemos por H = $L^2(\Omega)$,el espacio formado por las variables aleatorias con variancia finita.

4.1 Teorema El conjunto H, formado por las variables aleatorias con variancia finita, es un espacio lineal sobre **R. La función** $\|\ \|$: H$\to$ **R, definida como la raíz cuadrada de la esperanza del cuadrado de X.**

(4.4) $$\| X \| = [E(X^2)]^{1/2}$$
es una norma sobre H.

Demostración $0 \le (X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$.
Luego,
$$XY \le ½ [X^2 + Y^2],$$
De donde
$$E(XY) \le ½ [E(X^2) + E(Y^2)]$$
Finalmente
$$E(X+Y)^2 < \infty \ .$$
Se ha demostrado que la suma de dos variables aleatorias, con variancia finita, es una variable aleatoria con variancia finita. De manera análoga se demuestra que el producto de una constante c y una variable aleatoria, es una variable aleatoria en H.

qed

4.5 Ejemplo El espacio l_2 .

Este ejemplo es un caso particular del espacio $L_2(\Omega , \Sigma , P)$, cuando Ω es igual al conjunto **N= { 1,2,3,...}** de los números naturales, Σ es la familia de todos los subconjuntos de **N**, y P es la medida de conteo.
Los puntos de l_2 son sucesiones de números reales
(4.5) $$x = \{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots$$

cuya suma de cuadrados es finita

(4.6) $$\sum x_n^2 < \propto.$$

El espacio l_2 es un espacio lineal normado. La norma del punto x es

(4.7) $$|| x||_2 = (\sum x_n^2)^{1/2}$$

5.-Métricas o Distancias sobre un Espacio Lineal Normado.

La **distancia** entre dos vectores v,w del espacio lineal normado (V,n), es la función d: VxV → **R**, definida como la norma de la diferencia de los vectores

(5.1) $$d(v,w)= n(v-w).$$

Como consecuencia de la definición de norma tiene las siguientes propiedades

5.2. **Teorema** La distancia entre dos puntos v, w en V, es no- negativa.

(5.2) i) $d (v, w)\geq 0$

La distancia ente dos puntos es cero sí y sólo sí, los puntos son iguales.

(5.3) ii) $d(v,w) = 0$ si y sólo sí $v = w$,

La función distancia es simétrica.

(5.4) iii) $d(v,w)=d(w,v)$,

Vale la desigualdad del triángulo.

(5.5) iv) $d(v,z) \leq d(v,w) + d(w,z)$,

donde v, w, z estan en V.

En general, una **métrica o distancia** sobre un conjunto no vacío X, es una función d : X x X→ **R**, que satisface las condiciones i), ii), iii), iv) del teorema 1.1.

5.1 Ejemplo .-El Espacio Euclidiano $\mathbf{R}^n$

El espacio euclidiano de dimensión n, es el conjunto de todas las n-adas

(5.6) $$\mathbf{x} =(x_1 , x_2 , ..x_n),$$

de números reales x_i , i =1,2,.. n. La n-ada **x** es **un punto ó vector en** el espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$, y los números reales x_i , i=1,2,…n, son las **coordenadas cartesianas** del punto **x.** En el espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$, estan definidas dos operaciones, llamadas **adición** y **multiplicación escalar** definidas por las ecuaciones

(5.7) $(x_1, x_2, \ldots x_n) + (y_1, y_2, \ldots y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2 \ldots x_n + y_n)$,

(5.8) $c(x_1, x_2, \ldots x_n) = (cx_1, cx_2, \ldots cx_n)$, donde c es un número real.

En el Álgebra Lineal se demuestra que este espacio es un espacio vectorial sobre el campo **R** de los reales. Por esta razón los puntos del espacio $\mathbf{R^n}$**,** seran llamados vectores.
El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$, en el espacio $\mathbf{R^n}$,es el escalar

(5.9) $$\mathbf{x.y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Cómo es bien sabido este producto escalar es un producto interno, es decir una funcional bilineal, simétrica y definidamente positiva.

La **norma** de un vector **x** en $\mathbf{R^n}$,es igual a la raíz cuadrada del producto escalar de **x** por sí mismo

(5.10) $$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x.x})^{1/2}.$$

La **distancia** entre dos puntos **x,y de** $\mathbf{R}^n$ es igual a la norma de la diferencia entre los vectores **x,y.**

(5.11) $$d(\mathbf{x,y}) = \|\mathbf{x-y}\| .$$

5.2 Ejemplo Al espacio lineal $\mathbf{R^n}$**,** se le puede asignar otra norma**.**La **norma uniforme sobre $\mathbf{R^n}$,es la función**

(5.12) $$||x|| = \max \{|x_i|, i = 1,2,\ldots n\}.$$

II.- Espacios Métricos.Definiciones. Ejemplos

1.- **Definiciones**.**Ejemplos**

Un **espacio métrico,** es una pareja (X, d) formada por un conjunto no vacío, X, y una métrica o distancia d sobre X.

1.1 **Ejemplo**.**El Espacio Discreto.** Sea X un conjunto no vacío, y definamos la función d : XxX $\rightarrow$ **R,**

$$\mathbf{d(x,y) = 1, \text{ si } x \neq y.}$$
$$\mathbf{= 0, \text{ si } x = y.}$$

Esta función es una métrica sobre X. El espacio (X,d) es el **espacio discreto.**

Espacios Métricos Lineales

1.2 **Ejemplo** Sea **R,** el espacio lineal formado por los reales. La función d: **RxR$\rightarrow$ R,** definida por **$d(x,y) = | x - y |$,** es una métrica sobre **R**.

1.3 **Ejemplo** Sea **$\mathbf{R}^n$,** el espacio euclidiano de dimensión n, es decir el espacio lineal cuyos puntos son n-adas de números reales**.** La función
d : **$\mathbf{R}^n$ x $\mathbf{R}^n$** $\rightarrow$ **R**,definida por

$$d(x,y) = \max \{| x_i - y_i| \quad : i = 1,2,3, \ldots n\},$$
es una métrica sobre R^n.

1.4 **Ejemplo** Sea BS(**R**), el espacio lineal formado por las sucesiones acotadas de números reales, $x = \{ x_n, n = 1,2,3, \ldots\}$. La función
$d (x,y) = \sup \{| x_n - y_n| : n = 1,2, \ldots\}$, es una métrica sobre BS(**R**).

Ejercicios

1.- Demostrar que las métricas en los ejemplos 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, son efectivamente distancias.

2.-Espacios Métricos Curvos. Superficies Regulares en $\mathbf{R}^3$.

En esta sección vamos a presentar algunos ejemplos de espacios métricos curvos. Dichos ejemplos serán superficies regulares en $\mathbf{R}^3$.
Sea p un punto de una superficie regular S en $\mathbf{R}^3$. Entonces existe una vecindad V de p, difeomorfa a un conjunto abierto U de $\mathbf{R}^2$.
El difeomorfismo $\mathbf{x} : U \to V$, es una **parametrización de S, en torno al punto p.** La vecindad V es una **vecindad coordenada** del punto p. Las coordenadas del punto q = $\mathbf{x}^{-1}$ **(p)** son las **coordenadas locales de p en la parametrización x.** Podemos escribir

$$(2.1) \qquad p = \mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas de p.

Los **vectores tangentes a las curvas coordenadas** son las primeras derivadas parciales de **x**, con respecto a las coordenadas locales u,v de p.

$\mathbf{x}_1(u,v) = (\partial x/\partial u, \partial y/\partial u, \partial z/\partial u)$, $\mathbf{x}_2(u,v) = (\partial x/\partial v, \partial y/\partial v, \partial z/\partial v)$.

Los coeficientes de la primera forma fundamental, de la superficie regular S, en la parametrización **x**, son los productos escalares,

$$(2.2) \qquad \mathbf{E = x_1 \cdot x_1, \; F = x_1 \cdot x_2, \; G = x_2 \cdot x_2 .}$$

El **determinante de la primera forma fundamental es**

$$(2.3) \qquad \mathbf{g(u, v) = EG - F^2 .}$$

2.1 Ejemplo. **El Plano** Sea f (x,y) = Ax + By + C : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

La gráfica de esta función es el plano

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x,y) \in \mathbf{R}^2, z = Ax + By + C \}.$$

La función $\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, definida por

$$\mathbf{x}(x,y) = (x,y, Ax + By + C) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,$$

es una parametrización del plano S.

Los vectores tangentes a las curvas paramétricas del plano , son

$$\mathbf{x}_1 = (1,0, A), \qquad \mathbf{x}_2 = (0,1, B).$$

Los coeficientes de la la primera forma fundamental, son

$$\mathbf{E} = 1 + A^2,\ \ \mathbf{F} = AB,\ \ \mathbf{G} = 1 + B^2.$$

El determinante de la primera forma fundamental, es

$$g = (1+A^2)(1+B^2) - (AB)^2.$$

2.2 **Ejemplo**. **Paraboloide de Revolución**

La gráfica $G(f) = \{ (x,y,z) \epsilon \mathbf{R}^3 : (x,y) \epsilon \mathbf{R}^2, z = f(x,y) \}$

de la función, $f(x,y) = x^2 + y^2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es un paraboloide de revolución.
Los vectores tangentes a las curvas coordenadas, son

$$\mathbf{x_1} = (1,0,2x),\quad \mathbf{x_2} = (0,1,2y).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental, son

$$\mathbf{E} = 1 + 4x^2,\ \ \mathbf{F} = 4xy,\ \ \mathbf{G} = 1 + 4y^2 .$$

El determinante de la primera forma fundamental

$$g = (1+4x^2)(1+4y^2) - 16x^2y^2 .$$

2.3 **Ejemplo La Esfera** La gráfica de la función

$$z = f(x,y) = [1-(x^2+y^2)]^{1/2} : U \to \mathbf{R},$$

(donde **U** es el interior del círculo unitario, en $\mathbf{R}^2$**),** es la esfera con centro en el orígen y radio 1.La función $\mathbf{x}(x,y) = (x,y,f(x,y)) : \mathbf{U} \to \mathbf{R}^3$**, es** una parametrización de la esfera unitaria.
Los vectores tangentes a la esfera unitaria , son

$$\mathbf{x_1} = (1,0, -2x / [1-(x^2+y^2)]^{1/2},).\ \ \mathbf{x_2} = (0,1, -2y / [(1-(x^2+y^2))]^{1/2}.).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental, son

$\mathbf{E} = (1+4x^2) / [1-(x^2+y^2)]$, $\quad \mathbf{F} = 4xy / [1-(x^2+y^2)]$,
$\mathbf{G} = (1+4y^2) / [1-(x^2+y^2)]$.

El determinante de la primera forma fundamental es

$$g = [(1+4x^2)(1+4y^2) - 16x^2y^2] / [1-(x^2+y^2)].$$

Curvas en una Superficie.

Una curva diferenciable en una superficie S, es una función diferenciable α : $[a, b] \rightarrow$ S, definida en un intervalo cerrado no vacío
$[a,b]$, con valores en S.
El **vector velocidad v de** la curva es su derivada $\mathbf{v} = d\alpha / dt$.
La **rapidez** de la curva α, es la norma $||\mathbf{v}||$ de su velocidad $\mathbf{v}$.
La **longitud L(α)** de la curva α, es la integral de su rapidez.

$$L(\alpha) = \int_a^b ||v|| \, dt.$$

Ejemplos.
2.4- Calcular la velocidad, la rapidez, y la longitud de la circunferencia unitaria

$$\alpha(t) = i(\cos t) + j(\operatorname{sen} t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2.$$

Solución. La velocidad de la curva es $\mathbf{v} = i(-\operatorname{sen} t) + j(\cos t)$.
La rapidez de la curva α **, es** $||\mathbf{v}|| = [\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t]^{1/2} = 1$.
La longitud de la circunferencia unitaria es

$$L(\alpha) = \int ||v|| \, dt = \int dt = 2\pi.$$

2.5- Sea $\alpha = (t, t, At + Bt + C) : [0,1] \rightarrow$ S = { (x,y,z) $\mathbf{R}^3$: (x,y) є $\mathbf{R}^2$, $z = Ax + By + C$ }, una curva en el plano S. (véase el ejemplo 2.1).
Su vector velocidad es $\mathbf{v} = (1,1, A+B) = i + j + k(A + B)$.
Su rapidez , es $||\mathbf{v}|| = [1+1+(A + B)^2]^{1/2} = [2 + (A+B)^2]^{1/2}$
La longitud de la curva α, es $L(\alpha) = [2+ (A+B)^2]^{1/2}$.

Distancia en una Superficie Arco- Conectable.
Una superficie S es **arco-conectable,** si para dos puntos cualesquiera p,q de la superficie existe una curva diferenciable ,α : $[0,1] \rightarrow$ S, que **une o conecta** a los puntos p, q. Es decir, $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$.

La **distancia entre dos puntos p, q de la superficie arco-conectable S,**es el infimum,(cota inferior máxima) de las longitudes de las curvas en S, que unen a p y q.

$$d(p,q) = \inf \{ L(\alpha) : \alpha \text{ conecta a p con q} \}.$$

2.1 Teorema La pareja (S, d), formada por una superficie arco-conectable S, y la función $d : S \times S \rightarrow \mathbf{R}$, es un espacio métrico.

Ejercicios
1.- Calcular los coeficientes y el determinante de la primera forma fundamental del cilindro circular recto, parametrizado por

$\mathbf{x}(r, \theta) = i\,(r \cos \theta) + \mathbf{j}\,(r \operatorname{sen} \theta),\ 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

2.-Calcular la longitud de la curva

$$\alpha(t) = i\,(\cos t) + j\,(\operatorname{sen} t) + k: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$$

3.-Demostrar que la distancia entre dos puntos, en una superficie arco-conectable, es una métrica sobre la superficie.

3.-Conjuntos Abiertos

A todo espacio métrico, le podemos asignar una topología por medio de bolas abiertas, como en el caso del espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$.

Definición Sea **x** un punto en el espacio métrico **X**, y $r > 0$ un real positivo. La **bola abierta** con centro en **x**, y radio $r > 0$, es el conjunto

$$B(\mathbf{x}; r) = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{X} : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r \}, \tag{3.1}$$

de todos los puntos **y** en **X** cuya distancia a **x**, es menor que r.

Fig

Un subconjunto A de X, es **abierto**, si cada punto **x** en A, tiene una bola abierta con centro en **x,** y radio positivo r, contenida en A.

3.1 **Ejemplo** Una bola abierta, es un conjunto abierto

Interior Exterior y Frontera de un conjunto

Un punto **x** es **punto interior** de A, si existe una bola abierta , con centro en x , y radio positivo, contenida en S. El **interior** de un conjunto A, es el conjunto formado por sus puntos interiores.

Un punto x es **punto exterior** de un conjunto A , si existe una bola abierta con centro en x y radio positivo r, contenida en el complemento de A. El **exterior** de un conjunto es el conjunto ext (A) formado por los puntos exteriores de A. El exterior de un conjunto es igual al interior de su complemento.

Un punto x es **punto frontera** de un conjunto A, si cada bola con centro en x y radio positivo r, tiene puntos de A y de su complemento.

La **frontera fr(A)** de un conjunto A es el conjunto de sus puntos frontera.

Fig.

3.1**Teorema** El interior de un conjunto, tiene las siguientes propiedades
i) Un conjunto contiene a su interior

$$A \supset \text{int}(A).$$

ii) Si $A \supset B$, entonces, $\text{int } A \supset \text{int } B$.

iii) El interior de la unión de dos conjuntos A, B, contiene a la unión de sus interiores.

$$\text{Int}(A\cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B).$$

iv) El interior de la intersección de dos conjuntos , es igual la intersección de sus interiores.

$$\text{Int}(A\cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B).$$

3.2-**Ejemplo**. El intervalo abierto $(0,1)=\{ x \epsilon \mathbf{R} : 0<x<1\}$ es un conjunto abierto.
En efecto, sea $x \varepsilon (0,1)$ y sea $r > 0$ la distancia mínima de x, a los puntos 0,1. Entonces la bola abierta $(x-r/2,x+r/2)$,está contenida en (0,1).

3.3-**Ejemplo** El interior $\text{int}(S) = \{ (x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ del círculo unitario
.

$$S = \{(x, y) \epsilon \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

es un conjunto abierto. En efecto, sea (x, y) un punto en int (S), y sea r la menor de las cantidades $s = d ((x, y), (0, 0))$, y 1-s. Entonces la bola con centro en (x, y) y radio r/2 ,está contenida en S.
El exterior de S es el conjunto

$$\text{ext}(S) = \{ (x,y) \varepsilon \mathbf{R}^2 : \mathbf{x^2 + y^2 > 1} \}.$$

La frontera del círculo unitario S, es la circunferencia

$$\text{fr}(S) = S((0,0) , 1) = \{ (x,y) : x^2+ y^2 = 1\}.$$

Fig

3.4 **Ejemplo** El círculo unitario $S = \{(x, y) \epsilon \mathbf{R}^2 : x^2+ y^2 \leq 1\}$, no es un abierto en $\mathbf{R}^2$, porque los puntos en la circunferencia, con centro en el orígen y radio 1

$$S((0,0), 1) = \{ (x,y) \varepsilon \mathbf{R}^2 : x^2+ y^2= 1,\}$$

no son puntos interiores de S.

3.5 **Ejemplo** El intervalo cerrado [a, b], no es un conjunto abierto, porque los puntos extremos a, b no son puntos interiores de [a, b].

Los conjuntos abiertos tienen las siguientes propiedades

3.2 Teorema: i) El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto total X, son conjuntos abiertos.
ii) La unión de una familia arbitraria de conjuntos abiertos, es abierta
iii) La intersección de dos abiertos es abierta.

Demostración i) Un conjunto A es no abierto si existe un punto en el conjunto que no es punto interior de A. El vacío no satisface esta condición , luego por el principio del tercero excluido, el vacío es abierto.

ii) Sea x un punto en el espacio métrico X. Entonces la bola abierta con centro en x y radio r, está contenida en X, luego, X es abierto.

iii) Sea $\{A_i\ ,\ i \in I\ \}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de X. Queremos demostrar que la unión $A = \cup_i A_i$ es un conjunto abierto. Sea $x \in A$ un punto en la unión de los conjuntos A_i .Entonces $x \in A_i$ para algún i .Pero A_i es abierto por hipótesis, luego existe una bola abierta B, contenida en A_i .Pero entonces B está contenida en la unión A.
Entonces A es abierta.

iv) Sean A, B dos conjuntos abiertos, no vacíos, y sea x un punto en la intersección $I = A \cap B$ de A y B. Entonces existen dos bolas C, D, con centro en x, tales que C está contenida en A y D está contenida en B. Luego, la intersección de C y D está contenida en I.

qed

La intersección de una familia infinita de abiertos, no necesariamente es abierta.

3.5-**Ejemplo** La intersección de la familia de conjuntos abiertos $G_n = \{ x \in \mathbf{R}: -1/n < x < 1+1/n\}$, es el intervalo cerrado [0,1]. Los puntos 0,1 de este intervalo no son puntos interiores de [0,1].
Una consecuencia inmediata del teorema 3.1,es el

3.4.-**Corolario** El exterior de un conjunto tiene las siguientes propiedades
i) Si $A \subset B$ entonces $ext(A) \supset ext(B)$.
ii) $ext(A \cup B) = ext(A) \cap ext(B)$.
iii) $ext(A \cap B) \supset ext(A) \cup ext(B)$.

Vamos a demostrar i).

Demostración $A \subset B$, por hipótesis , luego, $A^c \supset B^c$.

Por el teorema 3.1

$$\text{ext}(A) = \text{int}(A^c) \supset \text{int}(B^c) = \text{ext}(B).\textbf{qed}$$

4.-Conjuntos Cerrados

Definición Un conjunto C en un espacio métrico X, es **cerrado**, si su complemento es abierto.

4.1 **Ejemplo** Los conjuntos vacío $\varnothing$ y total V, son conjuntos cerrados.
En efecto el complemento del vacío $\varnothing$,es el total X, que es abierto.El complemento del total X es el vacío ,que como sabemos es abierto.

4.2 **Ejemplo** El intervalo cerrado $I = [a ,b] = \{ x \in \mathbf{R} : a\leq x \leq b\}$,es un conjunto cerrado. En efecto, el complemento de I, es la unión de los conjuntos abiertos $\{x < a\}$, $\{x < b\}$.

Fig 4.1

4.3 **Ejemplo**. La bola cerrada**,** con centro en el punto **x, y** radio **r > 0,** es el conjunto

$$B[x,r] = \{ y\in X : d(x,y) \leq r\}.$$

La bola cerrada es un conjunto cerrado.

Fig 4.2 Bola Cerrada

Las propiedades fundamentales de los conjuntos cerrados se deducen del teorema 3.2, usando el teorema de DeMorgan.

4.1 Teorema i) El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto total V, son cerrados.
ii) La unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
iii) La intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Cerradura de un conjunto

Un punto x de un espacio métrico X, es **punto de contacto** de un conjunto S de X, si toda bola abierta con centro en x, y radio positivo r>0, contiene por lo menos un punto de S.
La **cerradura** S* de un conjunto S, es el conjunto formado por los puntos de contacto de S.

Ejemplos
1.- Un punto interior de un conjunto es punto de contacto del conjunto.
Es decir, el interior de un conjunto está contenido en su cerradura.

$$\text{int}(A) \subset A^*.$$

2.- Todo punto frontera de un conjunto es punto de contacto del conjunto. Es decir , la frontera de un conjunto está contenida en la cerradura del conjunto

$$\text{fr}(A) \subset A^*.$$

3.-Un punto exterior a un conjunto , no es punto de contacto del conjunto. Es decir, el exterior de un conjunto , no está contenido en su cerradura.

$$\text{ext}(A) \not\subset A^*.$$

4.2 Teorema La cerradura de un conjunto A es igual a la unión de su interior y su frontera.

$$A^* = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A).$$

Demostración Sabemos que la cerradura de un conjunto A* contiene a la unión de su interior y su frontera.

$$A^* \supset \text{int}(A) \cup \text{fr}(A).$$

Sea x un punto de A que no es punto frontera , ni punto interior de A. entonces x es punto exterior a A,lo cual es imposible.

qed

4.3Teorema. La cerradura de un conjunto, tiene las siguientes propiedades:
i) Todo conjunto está contenido en su cerradura

$$S \subset S^*.$$

ii) Si S está contenido en T, entonces S* está contenido en T*.

$$S \subset T \Rightarrow S^* \subset T^*.$$

Iii) La unión de las cerraduras de dos conjuntos, es igual a la cerradura de la unión.

$$(S \cup T)^* = S^* \cup T^*.$$

iv) La cerradura de la intersección de dos conjuntos, está contenida en la intersección de las cerraduras.

$$(S \cap T)^* \subset S^* \cap T^*.$$

La demostración de estas propiedades, se deja al lector.

La noción de cerradura nos permite caracterizar a los conjuntos cerrados, como los conjuntos que contienen todos sus puntos de contacto.

4.4 Teorema. Un conjunto es cerrado sí y sólo sí, contiene a su cerradura.

$$C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow C \supset C^*.$$

Demostración. Supongamos que C es cerrado, Queremos demostrar que

$$C \supset C^*.$$

Si C no contiene a C*, entonces existe un x ϵ C* - C. Pero C es cerrado , por hipótesis, luego, X-C es abierto, y por lo tanto existe una bola abierta con centro en x, y radio positivo contenida en el complemento X-C de C. Entonces x no está en C*.

Supongamos que $C \supset C^*$.Queremos demostrar que C es cerrado. Supongamos que C no es cerrado, es decir que X-C no es abierto. Entonces existe un punto x ϵ X-C, tal que toda bola abierta, de radio positivo contiene puntos de C, es decir x ϵ C*, lo cual contradice la hipótesis

$$C \supset C^*.$$

qed

Conjuntos Acotados y Totalmente Acotados

El **diámetro** de un conjunto A, en un espacio métrico X, es la cota superior mínima de las distancias entre los puntos de A.
U n conjunto A es **acotado**, si su diámetro es finito.

4.4 **Ejemplo** Toda bola abierta es acotada. Su diámetro es el doble de su radio.

4.5 **Ejemplo** Toda bola cerrada es acotada. Fig

4.4 **Teorema** Los conjuntos acotados , tienen las siguientes propiedades:
i) Todo subconjunto de un conjunto acotado , es acotado.
ii) La unión de dos conjuntos acotados, es acotada.
iii) La intersección de una familia arbitraria de conjuntos acotados, es acotada.

Un conjunto A, en un espacio métrico X, es **totalmente acotado,** si para todo real positivo r>0**,** existe un número finito de bolas abiertas de radio r, que cubren al conjunto.

Ejercicios

1.- Demostrar el teorema 4.1.
2.- a) Un conjunto totalmente acotado, es acotado.
b) Es un conjunto acotado, totalmente acotado?
c)Es la unión de dos conjuntos totalmente acotados, totalmente acotado?

3.- Sea S = { (x,y.z) ϵ $\mathbf{R}^3$: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$}, la bola cerrada con centro en el orígen y radio 1, en el espacio $\mathbf{R}^3$
a) Encontrar su interior, su cerradura y su exterior.(el interior de su complemento).
b) Es S abierto?, cerrado?.
4.- Es la intersección de una sucesión decreciente, de bolas cerradas no vacías, no vacía?
5.- Demostrar el teorema 4.3.
6.- Toda bola cerrada, es un conjunto cerrado
7.-Demostrar el teorema 4.2
8.- Un conjunto **C** es cerrado si **y** sólo si contiene su frontera**.**

5.-Celdas Nidificadas y el Teorema de Bolzano- Weierstrass.

Una sucesión de conjuntos { A_n } en un espacio métrico X, es **decreciente** si $A_n \supset A_{n+1}$, n = 1,.2,.3……
Una sucesión decreciente de intervalos cerrados { I_n }, es una sucesión **nidificada**

5.1 **Ejemplo** La sucesión [-1/n, 1/n], n = 1,2,3,… es una sucesión nidificada.

5.2 **Ejemplo** Las bolas cerradas { B[x, 1/n]},con centro en x, y radio positivo 1/n, forman una sucesión nidificada.

5.1 Teorema.(Celdas Nidificadas) La intersección de una sucesión nidificada de intervalos cerrados, no vacíos en **R** , es no vacía.

Demostración Sea { I_n }, I_n = [a_n , b_n] ,una sucesión nidificada de intervalos cerrados no vacíos. Entonces la sucesión { a_n } es creciente y la sucesión {b_n} es decreciente. La sucesión creciente { a_n} esta acotada superiormente por b_1, y la sucesión decreciente { b_n } esta acotada inferiormente por a_1.
Sea a la cota superior mínima de { a_n } y b la cota inferior máxima de {b_n }, los cuales existen porque **R** es un espacio métrico completo.
Si a $\geq$ b**,** entonces dado $\varepsilon>0$, existen a_i y b_j tales que

$$a- \epsilon < a_i < a, ; b < b_j < b+\epsilon .$$

Si i < j, el intervalo [a_i , b_i], es vacío, contradiciendo la hipótesis de que los intervalos I_n son no vacíos.

qed.

Nuestro siguiente paso será demostrar el teorema de **Bolzano-Weierstrass.**

Puntos de Acumulación

Un punto x en un espacio métrico X , es **punto de acumulación o punto límite de un conjunto A,** si cada bola con centro en x, y radio positivo r>0, contiene un punto y de A, distinto de x.
Sea L(A) la familia de puntos de acumulación de A

Ejemplos
1.-Un punto de acumulación de un conjunto A , es punto de contacto de A.
Es decir,

$$L(A) \subset A^*.$$

5.2 Teorema. Un punto x es punto límite de un conjunto A, si y sólo si, cada bola con centro en x, y radio positivo r>0, tiene una infinidad de puntos de A.

Demostración Sea x un punto límite de A.Supongamos que existe una bola B(x, r), que contiene sólo un número finito x_i , i = 1,2, ..n, de puntos de A.Sea s el mínimo de las distancias de x a x_i. Entonces la bola B(x, s/2), no contiene ningún punto de A, diferente de x.

qed

5.3 Corolario Un conjunto finito no tiene puntos de acumulación.

5.4 Teorema. Un conjunto A es cerrado si y sólo si, contiene sus puntos límites.

$$A \text{ es cerrado} \Leftrightarrow A \supset L(A).$$

Demostración Supongamos que A es cerrado, luego, A contiene su cerradura, lo cual implica que contiene sus puntos límite, porque todo punto de acumulación es punto de contacto de A.
Supongamos que A contiene a todos sus puntos límite.La cerradura de A es $A^* = A \cup L(A)$, luego, A contiene a su cerradura, y es por lo tanto cerrado.

qed

5.1 **Ejemplo** Todo punto del intervalo abierto I = (a,b), es punto de acumulación de I.
5.2 **Ejemplo** Todo punto del intervalo cerrado [a,b], es punto de acumulación de [a,b].

5.5 Teorema (Bolzano- Weierstrass).Todo conjunto infinito y acotado de números reales, tiene un punto de acumulación

Demostración Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Entonces A está contenido en un intervalo cerrado I = [a,b].
Dividamos el intervalo I, en dos partes iguales. Entonces al menos una de las mitades I_1, tiene una infinidad de puntos de A. Dividamos I_1, en dos mitades, entonces al menos una de ellas I_2, tiene una infinidad de puntos de A. Procediendo en esta forma, obtenemos una sucesión decreciente $\{ I_n \}$, de intervalos cerrados, no vacíos. Por el teorema de las celdas nidificadas, la intersección de la sucesión $\{ I_n\}$, es no vacía.Sea x un punto de dicha intersección y (x-r, x+r) , un intervalo abierto con centro en x y radio r. Sea c la longitud de I, entonces la longitud de I_n es $c/ 2^n$ Podemos hacer a n lo suficientemente grande como para que (x-r, x+r)), contenga a I_n.
Entonces x es punto de acumulación de A.

Qed

Ejemplo El teorema de Bolzano – Weierstrass no es válido en el espacio l_2

En efecto el conjunto de vectores básicos e_i , i= 1,2,3,… que tiene un uno en la i-ésima posición y ceros en las demás posiciones es infinito y acotado, pero no tiene ningún punto de acumulación.

Ejercicios

1.- Es la intersección de una sucesión decreciente de bolas cerradas no vacías,en **R** no vacía? en $\mathbf{R}^n$**? ,** en un espacio lineal normado arbitrario**?**
2.- Es toda bola cerrada, no vacía, cerrada y acotada?
3.- Un conjunto cerrado, es la intersección, de una familia de complementos de bolas abiertas.
4.- ¿Es la intersección de una sucesión decreciente de intervaos abiertos, no vacía?
5.-¿Tiene todo conjunto infinito de números reales un punto de acumulación?

6.-Conjuntos Compactos

Los matemáticos Heinrich Heine y Emil Borel, caracterizaron los intervalos cerrados de la recta **R**, como los conjuntos para los cuales toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita, (véase más abajo).Esta caracterización topológica de los intervalos cerrados en **R**, generó el problema de la caracterización de los compactos en otros espacios métricos.(Véase el teorema de Arzela- Ascoli cap IX sección 10). En estas notas sólo estudiamos el espacio **R** y el espacio

C[a,b] de las funciones reales continuas definidas en el intervalo cerrado [a, b].

Definición Una **cubierta** de un conjunto K, es una familia $\{ A_i, i \in I \}$ de conjuntos, cuya unión contiene a K.
Una cubierta de **K es abierta** si cada A_i , es abierto**.**
Una **subcubierta** de una cubierta de K ,es una subfamila de la cubierta que tambien es una cubierta de K.
Un conjunto K en un espacio métrico X, es **compacto**, si toda cubierta abierta de K, tiene una subcubierta finita.

6.1 Ejemplo Todo conjunto finito**, e**s compacto

Antes de dar algunos ejemplos de conjuntos compactos, estableceremos algunas propiedades de tales conjuntos.

6.1 **Teorema**. Todo subconjunto cerrado C, de un conjunto compacto K, es compacto

Demostración. Sea Γ una cubierta abierta de C.El conjunto C es cerrado, por hipótesis, luego X-C es abierto.
La familia $\Gamma \cup \{X-C\}$, es una cubierta abierta de K, luego, por ser K compacto, existe una subcubierta finita Δ de K, que posiblemente contenga a X –C. La familia Δ - (X-C), tambien es subcubierta finita de Γ, que cubre a C.

6.2 Teorema En un espacio métrico la unión de dos conjuntos compactos K,L es compacta.

Demostración Sea Γuna cubierta abierta de $K\cup L$. Entonces, Γes una cubierta abierta de K y tambien de L. Pero K, L son compactos, por hipótesis, luego, existen dos subcubiertas finitas Δ ,Φ de Γque cubren a K y a L, respectivamente. Luego $\Delta\cup\Phi$ es una subcubierta finita de $K\cup L$.

6.3 Teorema En un espacio métrico un conjunto compacto es cerrado y acotado

Demostración Sea $\Gamma = \{B(x; r), x \in K,\}$, la familia de bolas abiertas , con centro en un punto x de K, y de radio positivo r >0. Entonces Γ es una cubierta abierta de K. Pero K es compacto por hipótesis, luego, existe una subcubierta finita

$$\Delta= \{ B(x_i ,r), i = 1,2, \ldots n \}, \text{ de K.}$$

Sea y un punto en el complemento de K. Podemos encontrar una bola de radio positivo con centro en y, que no intersecta a ninguna de las bolas de Δ . Luego, el complemento de K es abierto, y K es cerrado.
Vamos a demostrar que K es acotado. Sea Γ la cubierta abierta de K descrita en el párrafo anterior. Entonces, por ser K compacto, tiene una subcubierta finita . Pero cada bola es un conjunto acotado, y K esta contenido en una unión finita de bolas abiertas, luego, K es acotado.

qed

Ejemplos
1.- No todo subconjunto de un compacto, es compacto
En efecto, el conjunto abierto (0,1) no es un subconjunto compacto del intervalo compacto [0,1].
2.- La unión de una familia infinita de conjuntos compactos , no es necesariamente compacta.
La recta real **R** es la unión $\mathbf{R} = \cup_{x \,\varepsilon\, \mathbf{R}.} \{x\}$ de los conjuntos compactos $\{x\}$, pero **R** no es compacta, porque no es acotada.

6.4 **Teorema** En un espacio métrico, un conjunto compacto es totalmente acotado.

Demostración Sea K un conjunto compacto en X.La familia de bolas abiertas con radio positivo r>0 y centro en los puntos x de K,es una cubierta abierta de K,pero como K es compacto , por hipótesis,existe una subcubierta finita $\{ B(x_i ,r): i = 1,2,\ldots n\}$ que cubre a K.

qed

6.5 Teorema (de Intersección de Cantor) En un espacio métrico , una sucesión decreciente $\{ K_n \}$ de conjuntos compactos , no vacíos, tiene intersección no vacía.

Demostración Supongamos que la intersección de la sucesión $\{K_n\}$, es vacía. Es decir, $\cap K_n = \varnothing$,entonces, por el teorema de De Morgan,

$$\mathbf{R^n} = \mathbf{R^n} - (\cap K_n) = \cup (\mathbf{R^n} - K_n) = \cup G_n ,$$

donde G_n el complemento de K_n.
La sucesión $\{ G_n \}$ es una cubierta abierta de K_1, luego existe una subcubierta abierta finita $\{ G_k, k = 1,2, \ldots m\}$ de K_1.La sucesión $\{ K_n \}$ es decreciente, luego, la sucesión $\{ G_n \}$ es creciente, lo cual implica que

$$K_1 \subset G_m.$$

Finalmente,

$$K_m = K_1 \cap K_m = \emptyset,$$

lo cual contradice la hipótesis de que los K_n, son no vacíos.

qed

6.6 Teorema En un espacio métrico X, todo subconjunto infinito S de un conjunto compacto, K, tiene un punto límite en K.

Demostración Supongamos que ningun punto de K, es punto límite de S. Entonces todo punto q de K, tiene una vecindad V_q , que contiene a lo más un punto de S. La familia { V_q , q en K}, es una cubierta abierta de S, que no contiene ninguna subcubierta finita, lo mismo sucede con K, ninguna subcubierta finita de { V_q , q en K}, cubre a K, lo cual contradice la hipótesis de que K es compacto

qed

7.-Compacidad en los Reales.

En esta sección demostraremos el teorema de Heine- Borel, el cual afirma que un conjunto de números reales es compacto si y sólo si, es cerrado y acotado

7.1-Lema. Un intervalo cerrado I = [a,b], de números reales es compacto

Demostración Sea Γ, una cubierta abierta de I. Queremos demostrar que existe una subcubierta finita de Γ.Supongamos que tal subcubierta finita no existe. Dividamos al intervalo I en dos partes iguales.Al menos una de esas mitades I_1, no tiene subcubierta finita. Dividamos I_1, en dos partes iguales, al menos una mitad I_2, no tiene subcubierta finita. Procediendo en esta forma obtenemos una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos cerrados, no vacíos. Por el teorema de las celdas anidadas, la intersección de los intervalos I_n , no es vacía. Sea x un punto de la intersección de los I_n . El punto x es punto de contacto de los intervalos I_n .
Ahora, Γ es una cubierta abierta de I, luego existe un conjunto abierto G en ,que contiene a x. En consecuencia, existe una bola abierta B(x, r),con centro en x, y radio positivo r, contenida en G.
La longitud del intervalo I_n , es $b-a/ 2^n$.Tomando a n suficientemente grande, podemos hacer que I_n ,esté contenido en la bola $B(x,r) \subset G$.
Esto contradice la hipótesis de que I_n , no tiene subcubierta finita, lo cual demuestra el lema.**qed**

7.2 Teorema (Heine- Borel) Todo conjunto cerrado y acotado **K** de números reales**,** es compacto.

Demostración K es acotado, luego existe un intervalo cerrado I, que lo contiene. Pero I es compacto por el Lema 7.1, y K es cerrado por hipótesis, luego, K es compacto.

qed

7.1 Ejemplo En el espacio l_2 no es válido el teorema de Heine –Borel

En efecto, el conjunto de vectores básicos $\{e_n$,n= 1,2,3, … $\}$ donde e_n es la sucesión de números reales cuyo n –ésimo término es uno y los restantes términos son cero , forman un conjunto cerrado y acotado que no es compacto.

7.3 Teorema (de Intersección de Cantor) En el espacio euclidiano $\mathbf{R^n}$, una sucesión decreciente $\{ K_n \}$ de conjuntos compactos , no vacíos, tiene intersección no vacía.

Demostración Es consecuencia del teorema 6.5 Supongamos que la intersección de la sucesión $\{K_n\}$, es vacía. Es decir, $\cap K_n = \varnothing$,entonces, por el teorema de De Morgan,

$$\mathbf{R^n} = \mathbf{R^n} - (\cap K_n) = \cup (\mathbf{R^n} - K_n) = \cup G_n ,$$

donde G_n el complemento de K_n.

La sucesión $\{ G_n \}$ es una cubierta abierta de K_1, luego existe una subcubierta abierta finita $\{ G_k$, k = 1,2, …m$\}$ de K_1.La sucesión $\{ K_n \}$ es decreciente, luego, la sucesión $\{ G_n \}$ es creciente, lo cual implica que

$$K_1 \subset G_m.$$

Finalmente,

$$K_m = K_1 \cap K_m = \varnothing,$$

lo cual contradice la hipótesis de que los K_n, son no vacíos.

qed

7.4 Teorema (de Intersección de Cantor). La intersección de una sucesión decreciente $\{ C_n \}$ de conjuntos cerrados no vacíos, de números reales cuyo primer término,C_1 ,es acotado, es no vacía.

Demostración Es consecuencia del teorema 7.3.

8.- Conjuntos Conexos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de conjuntos conexos.Los intervalos en la recta son conjuntos conexos.Los conjuntos convexos en un espacio lineal normado son conexos.

Definición Un conjunto C en un espacio lineal normado es **inconexo**, si existen dos conjuntos abiertos U, V cuyas intersecciones $U\cap C$, $V\cap C$ con C , son ajenas no vacías, y su unión es C.

i) U,V son abiertos
ii) $U\cap C$, $V\cap C$,ajenas no vacías
iii) $C = (U\cap C)\cup (V\cap C)$.

El conjunto C es **conexo**, si no es inconexo.

Ejemplos

1.1 El conjunto de los naturales $\mathbf{N} =\{ 1,2,\dots\}$ es inconexo.
Sean $U= \{ x \varepsilon \mathbf{R}: x < 3/2\}$ **y** $V= \{ x \varepsilon \mathbf{R}: x> 3/2\}$.
Los conjuntos U,V son conjuntos abiertos en la recta real **R**, cuyas intersecciones con **N** son no vacías, y ajenas. Además

$$\mathbf{N} = (\mathbf{N}\cap U) \cup (\mathbf{N}\cap V)$$

1.2 El conjunto **Q** de los racionales es inconexo.
En efecto, los conjuntos $U = \{ x\varepsilon \mathbf{R} : x > 2^{1/2} \}$ $V = \{ x \varepsilon \mathbf{R} : x < 2^{1/2} \}$, son conjuntos abiertos en **R** , cuyas intersecciones con **Q** son ajenas y no vacías. Además, $\mathbf{Q} = (Q\cap U)\cup (Q\cap V)$.

El segmento que une dos puntos p ,q de un espacio lineal normado X, es el conjunto

(8.1) $$L(p,q) = \{ p+ t (q-p) : t \varepsilon [0,1] \}.$$

Un conjunto C en un espacio lineal normado, es **convexo**, si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.

8.1.- **Teorema** El intervalo cerrado [0,1] es conexo.

8.2- Teorema Un conjunto convexo en $\mathbf{R}^n$, es conexo.

Demostración Sea C un conjunto convexo en $\mathbf{R}^n$. Supongamos que C no es conexo, es decir, existen dos conjuntos abiertos U,V. cuyas intersecciones con C son ajenas y no vacías, tales que

$$C = (U\cap C)\cup (V\cap C).$$

Sean p,q dos puntos de C, entonces el segmento L(p,q), que une a los puntos p,q está contenido en C.

Sea

$$f(t) = p + t(q-p): [0,1] \to C,$$

una parametrización del segmento L(p,q).

Los conjuntos

$$A = \{t \varepsilon [0,1] : f(t) \varepsilon U \}, B= \{ t\varepsilon [0,1] : f(t) \varepsilon V \},$$

son conjuntos abiertos, cuyas intersecciones con I= [0,1] son ajenas no vacías y

8.3 **Teorema** La unión de dos conjuntos conexos cuya intersección es no vacía, es conexa.

III.- Sucesiones en un Espacio Métrico

1.-Sucesiones en un Espacio Métrico

Una **sucesión de puntos en un espacio métrico (** **X**,d) con métrica d, es una función f: **N** →**X** cuyo dominio es el conjunto **N={ 1,2,3,…}** de los números naturales, que toma valores en **X**.
Los vectores f(n)= x_n , n = 1,2,3, .. son los **términos** de la sucesión..Vamos a designar la sucesión f, con la notación f = { $\mathbf{x}_n$ }, y hablaremos de la sucesión {$\mathbf{x}_n$}.

Denotaremos por S(X) a la familia de sucesiones en el espacio métrico X.

Ejemplos
1.1 La sucesión {n } = 1,2,3,… es una sucesión de naturales
1.2 La sucesión {1/n } = 1,1/2, 1/3 …
1.3 La sucesión { nx } = x, 2x , 3x, … es una sucesión de funciones lineales.
1.4 La sucesión { x^n }, n = 1,2,3, …es una sucesión de funciones continuas
1.5 La sucesión { nx^n }, n = 1,2,3,…es una sucesión de funciones continuas.
1.6 La sucesión {$(x +y)^n$ }, n = 1,2,3,…es una sucesión de funciones de dos variables.
Denotaremos por S(X) la clase formada por las sucesiones en X.

Estamos especialmente interesados en las sucesiones convergentes.

Definición. Una sucesión {$\mathbf{x}_n$} **en X**, **converge al punto x** de **X,** si dado ϵ > 0, existe un natural N, tal que si n ≥ N, entonces , la distancia

(1.1) $$d(\mathbf{x}_n ,\mathbf{x})<\epsilon,$$

es menor que ϵ .
El punto **x,** es un **límite** de la sucesión f = {$\mathbf{x}_n$ }.
Una sucesión que no converge, es **divergente.**

Vamos a denotar por **S(X)** la clase de las sucesiones convergentes en el espacio métrico X.

Intuitivamente, una sucesión {$\mathbf{x}_n$} converge a **x**,si para n suficientemente grande, todos los puntos $\mathbf{x}_n$, están en la bola abierta B(**x** ;ϵ), con centro en x, y radio ϵ.

Denotaremos con CS(X) la clase de las sucesiones convergentes en X.

1.1 **Teorema**.(**Unicidad del Límite)** En un espacio métrico, el límite de una sucesión convergente es único.

(1.2) $$\begin{matrix} x_n \to x \\ x_n \to y \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{ x_n\}$ converge hacia los puntos **x, y.** Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe un índice N, tal que si $n \geq N$ entonces

$$d(x_n ,x) < \epsilon \ \text{ y } \ d(x_n ,y) < \epsilon .$$

En consecuencia

$$d(x ,y) \leq d(x ,x_n) + d (x_n , y) < 2\epsilon.$$

De donde $d(x,y) = 0$, y finalmente $x = y$.

qed

1.7 **Ejemplo** La sucesión $\{1/n\}$ converge a cero.

En efecto, para hacer a $1/n$ menor que $\epsilon > 0$, basta tomar $n > 1/ \epsilon$.

1.8 **Ejemplo**. La sucesión $\{n\}$ de números naturales, no converge.

La razón de que la sucesión $\{n\}$ no converja, es que no es acotada.

Sucesiones Acotadas

El **diámetro** de un conjunto A, denotado por d(A), en un espacio métrico, es el supremum, es decir, la cota superior mínima de las distancias entre sus puntos.

(1.3) $$d(A) = \sup \{ d(x ,y) : x \in A, y \in A\}.$$

Un conjunto A es **acotado** si su diámetro es finito.

1.9 **Ejemplo:** Todo conjunto finito es acotado.

1.10 **Ejemplo:** Toda bola (abierta o cerrada) es acotada. Fig #1.1

La **distancia** de un punto p a un conjunto A , es igual al infimum (cota inferior máxima) de las distancias d (p,x) del punto p a los puntos x de A.

(1.4) $$d(p,A) = \inf \{ d(x,p) . x \varepsilon A \}.$$

fig # 1.2

La **distancia entre dos conjuntos** A,B es el infimum (cota inferior mínima) de las distancias d(x,y), x en A y en B.

(1.5) $$d(A,B)= \inf \{ d(x,y) : x \varepsilon A, \ y \varepsilon B \}$$

1.2 **Teorema:** i) Todo subconjunto de un conjunto acotado, es acotado
ii) La unión de una familia finita de conjuntos acotados, es acotada.
iii) La intersección de una familia arbitraria de conjuntos acotados, es acotada

Una sucesión $\{ x_n \}$ en un espacio métrico X, es **acotada,** si el conjunto $A=\{ x_n , n\geq 1 \}$, formado por sus términos, es acotado.
Es decir, si el diámetro del conjunto A, es finito.

Denotaremos por BS(X) la clase de las sucesiones acotadas en el espacio métrico X.

1.3 **Teorema**. En un espacio métrico, toda sucesión convergente, es acotada.

(1.6) $$CS(X) \subset BS(X).$$

Demostración: Supongamos que la sucesión $\{\mathbf{x_n}\}$, converge hacia **x.** Entonces dado el número $\epsilon =1$, existe un natural N, tal que si $n\geq N$, entonces $d(x_n , x) < 1$. Tomemos a $m> N$, entonces

$$d (x_m , x_n) \leq d (x_m , x) + d (x, x_n) < 2\varepsilon.$$

qed

1.11 **Ejemplo** La sucesión {1/n} converge a cero.

En efecto, para hacer a 1/n menor que $\epsilon > 0$, basta tomar $n > 1/ \epsilon$.

1.12 **Ejemplo**. La sucesión {n} de números naturales, no converge.

La razón de que la sucesión {n} no converja, es que no es acotada.

No toda sucesión acotada es convergente.

1.13 Ejemplo La **sucesión {** 0,1,0,1,0,1,….} es acotada, pero no es convergente.

Sucesiones de Cauchy

Una sucesión $\{ x_n\}$ en un espacio métrico X, es **una sucesión** de **Cauchy,** si para toda $\epsilon > 0$ existe un índice N, tal que si $n \geq N$, $m \geq N$, entonces la distancia $d(x_m, x_n) < \epsilon$ entre x_m y x_n es menor que ϵ .

Es decir, una sucesión es de Cauchy, si podemos acercar dos de sus términos tanto como se desee, con tal de tomar sus índices lo suficientemente grandes.

Denotaremos por CA (X) la clase de sucesiones de Cauchy.

1.4 **Teorema.** En un espacio métrico, toda sucesión convergente es de Cauchy.

(1.7) $$CS(X) \subset CAS(X).$$

Demostración. Sea $\{ x_n \}$ una sucesión que converge a x ,es decir , dado $\epsilon > 0$ existe un natural N , tal que si $n\geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$ .Tomemos dos puntos x_m, x_n , con $m \geq N$, $n \geq N$. Entonces, por la desigualdad del triángulo

$$d(x_m , x_n) \leq d (x_m, x) + d (x , x_n) < 2\epsilon .$$

qed

No toda sucesión de Cauchy es convergente.

1.14 Ejemplo. La sucesión $\{ 1/n \}$, n = 1,2,3,.. en el intervalo semiabierto (0, 1], es de Cauchy, pero no es convergente, porque la sucesión converge a cero, pero cero no pertenece al intervalo (0,1].

Subsucesiones

Sea $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$, una sucesión creciente de números naturales. La sucesión $\{ x_{nk} \}$, k = 1,2,3, … es una **subsucesión de la** sucesión $\{ x_n \}$.

Ejemplos

1.15 Las sucesiones { 0,0,0,…} y { 1,1,1,…} son subsucesiones de la sucesión { 0,1,0,1,…}.

1.16 Las sucesiones $\{ 1/ 2n \}$, $\{ 1/ 3n \}$ … son subsucesiones de la sucesión $\{ 1/n\}$.

Una subsucesión $\{ x_{nk} \}$ de la sucesión $\{ x_n \}$ **converge a un punto x**, si dado un real positivo $\varepsilon > 0$,existe un natural K, tal que si $k > K$ entonces

(1. 8) $$d (x_{nk} , x) < \varepsilon.$$

1.5 Teorema En un espacio métrico, una subsucesión $\{ x_{nk} \}$de una sucesión convergente $\{ x_n \}$, es convergente.

(1. 9) $\{ x_n \} \varepsilon$ **CS(X)** $\Rightarrow$ $\{x_{nk}\} \varepsilon$ **CS(X).**

$\{x_{nk} \} \subset \{ x_n \}$

Demostración La sucesión $\{ x_n \}$ converge a un punto x, es decir, dado $\varepsilon>0$ existe un natural N tal que si n > N, entonces $d (x_n , x) < \varepsilon$.
Si k>N entonces $n_k > n_N >N$, luego, $d(x_{nk} , x) < \varepsilon$.
Es decir dado $\varepsilon >0$ existe un natural N, tal que si k > N, entonces

$$d(x_{nk} , x) <\varepsilon ,$$

lo cual implica que la subsucesión es convergente.

qed

Una sucesión con una subsucesión convergente, no necesariamente es convergente. Pero

1.6 Teorema En un espacio métrico,una subsucesión de una sucesión de Cauchy, es de Cauchy.

$\{ x_n \} \varepsilon CA(X) \Rightarrow$ $\{x_{nk} \} \varepsilon CA(X)$.

$\{x_{nk} \}\subset \{ x_n \}$

Demostración

La demostración es análoga a la del teorema 1.5.

1.7 Teorema En un espacio métrico**,** una sucesión de Cauchy**,** con una subsucesión convergente es convergente**.**

$\{x_n \}\varepsilon$ **CA(X)** $\Rightarrow$ $x_n \to x$

$x_{nk} \to x$

Demostración La sucesión $\{ x_n \}$ es de Cauchy, es decir , dado $\varepsilon>0$ existe un natural N, tal que si m > N, n > N, entonces $d (x_n , x_m) <\varepsilon$.
La subsucesión $\{ x_{nk} \}$ es convergente, es decir , dado $\varepsilon > 0$ existe $K\varepsilon$ **N** tal que si $k \geq K$ entonces $d (x_{nk} , x) < \varepsilon$.En particular, $d(x_K , x) < \varepsilon$.En consecuencia, para n > N >K, tenemos que

$$d(x_n , x) \leq d (x_n , x_K) + d (x_K, x) < 2\varepsilon.$$

qed

2.- **Sucesiones en un Espacio Lineal Normado**

Una **sucesión** en un espacio lineal normado (X,|| ||), es una función
f : **N**$\to$X, cuyo dominio es el conjunto **N** = { 1,2,3,…} de números naturales y cuyo contradominio es el espacio lineal normado X.

Los vectores $f(n) = x_n$, n = 1,2,3,… se llaman **términos de** la sucesión f .
La sucesión f la designaremos por $\{ x_n\}$.

Ejemplos

2.1.-La sucesión $\{n\}$ = 1,2,3,… es la sucesión de números naturales.
2.2.- La sucesión $\{ 1/n \}$ = 1,1/2, 1/3, ….
2.3- La sucesión $\{x_n\}$ = 1,0,1,0,1,0,…
2.**4.-** La sucesión $\{1/n^2\}$ = 1,1/4, 1/9, 1/16, …

Hemos visto anteriormente, en la sección 1 del Capítulo I, que todo espacio lineal normado (**X, ‖ ‖), es un espacio métrico con la métrica o distancia,**

(2.1) $$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Entonces podemos definir sucesiones convergentes,sucesiones acotadas y sucesiones de Cauchy, en un espacio lineal normado.
En consecuencia, los siguientes teoremas son ciertos para sucesiones en un espacio lineal normado

2.1-**Teorema** El límite de una sucesión convergente en un espacio lineal normado, es único

2.2 Teorema En un espacio lineal normado, toda sucesión convergente , es acotada

2.3 **Teorema** En un espacio lineal normado toda sucesión convergente es de Cauchy

2.4 Teorema En un espacio lineal normado, una sucesión de Cauchy, con una subsucesión convergente es convergente

En estos espacios podemos definir la suma de dos sucesiones y el producto de un real y una sucesión.

La **suma** de dos sucesiones $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$, en un espacio lineal normado X,es la sucesión $\{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n\}$, definida por

(2. 2) $$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$$

El **producto** de un real c y una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$,en un espacio lineal normado X, es la sucesión $\{c\mathbf{x}_n\}$.

(2.3) $c\{x_n\} = \{cx_n\}$

En el caso de que X sea un espacio con producto interno, podemos definir el producto interno de dos sucesiones.

El **producto interno** de dos sucesiones **$\{x_n\}$, $\{y_n\}$** en un espacio lineal con producto interno X,es la sucesión de números reales **$\{x_n.y_n\}$,** cuyos términos son los productos internos $x_n.y_n$ de los términos de las sucesiones $\{x_n\}$,$\{y_n\}$

(2. 4) $\{x_n\} .\{y_n\} = \{x_n . y_n\}$

Ejemplos en R^2

2.5- La suma de las sucesiones { 1/n, 3/n} y { n, 2n + 1 } en **R^2, es { 1/n + n , 3/n,+2n +1}.**El producto interno de tales sucesiones es la sucesión de números reales, {(1/n).n , 3/(2n + 1)/n} = {1,6 + 3 /n }.

2.6- El producto de las sucesiones { n x } y { 2n x + 3 } es la sucesión de funciones $\{2n^2x^2 + 3nx\}$.

3.-Sucesiones Acotadas en un Espacio Lineal Normado.

Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio lineal normado X, es **acotada** si existe un real positivo M > 0, tal que

(3.1) $||x_n|| \leq M$,

para todo natural n,es decir si

(3.2) $\sup\{||x_n|| : n= 1,2. \ldots\} \leq M < \infty$.

3.1 Teorema La clase BS(X),de las sucesiones acotadas en un espacio lineal normado X, forman un espacio lineal sobre los reales. La función N : BS(X)→ **R**, definida por

(3.3) $N(\{x_n\}) = \sup\{||x_n|| : n = 1,2,\ldots\}$.

es una norma sobre BS(X).

Demostración Sean $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ dos sucesiones acotadas en X. Entonces existe un real positivo M > 0 ,tal que

$$||x_n|| < M,\ n = 1,2,.. , \quad ||y_n|| < M,\ n =1,2,\ldots .$$

De aquí concluimos que

$$\| x_n+y_n \| \leq \| x_n \| + \| y_n \| < 2M.$$

Es decir , la suma de dos sucesiones acotadas , es una sucesión acotada.
De manera análoga , se demuestra que c { x_n } es acotada.
Ahora,

$$\sup \{\| x_n + y_n \| : n = 1,2, \ldots\} \leq \sup \{\| x_n \| : n=1,2,\ldots\} + \sup \{\| y_n \| ; n= 1,2,\ldots\},$$

es decir

$$N(\{ x_n + y_n \}) \leq N(\{ x_n \}) + N(\{ y_n \}) .$$

De manera análoga se demuestran las otras propiedades de una norma.

qed

Ejemplos

1.- La sucesión {n} = 1,2,3,… no es acotada.
2.- La sucesión { x_n } donde x_n = 1,0,1,0,1,0,1,0,… es acotada.
3.- La sucesión $x_n =$ 1, 1/2, 1/3,…1/n,… es acotada.
La sucesión {n ,n^2 } = (1,1), (2,4), (3,9), .. en $\mathbf{R}^2$, no es acotada.

4.-Sucesiones Convergentes

Dado que un espacio lineal normado (X, $\| \;\|$) es un espacio métrico con métrica o distancia d(x, y) = $\| x - y \|$, tenemos las siguientes definiciones en un espacio lineal normado.

Una sucesión { x_n } en un espacio lineal normado **converge a un vector x,** si dado $\epsilon > 0$, existe un número natural N ϵ **N**, tal que si n > N, entonces

(4.1) $$\| x_n - x \| < \epsilon .$$

Una sucesión que converge a un punto se llama **convergente,** y el punto x, **es un punto límite de la sucesión.**
Si la sucesión { x_n } converge al vector (ó punto) x, escribimos

(4.2) $$\lim_{n \to \infty} x_n = x ,$$

y decimos que **la sucesión { x_n } converge a x, cuando n tiende a infinito.**
Una sucesión que no converge , se llama **divergente.**

Las preguntas que surgen inmediatamente, son: ¿Es la suma de dos sucesiones convergentes, convergente?¿Es el producto de un real c y una sucesión

convergente, una sucesión convergente ? . Si el espacio X, tiene un producto interno, ¿es el producto interno de dos sucesiones convergentes , convergente?.
La respuesta a cada una de estas preguntas es afirmativa.

4.1 Teorema. El límite de una sucesión convergente, es único.
Es consecuencia del teorema 1.1

4.2 Teorema Toda sucesión convergente, es acotada.

(4, 3) $\quad CS(X) \subset BS(X)$

Demostración Sea $\{ x_n \}$ una sucesión convergente, es decir , dado $\epsilon = 1$ existe un natural N, tal que si $n > N$, entonces $d (x_n , x) = || x_n - x || < 1$.
Entonces, si n>N,

$$|| x_n || = || x_n - x || + || x || < 1 + || x || .$$

La sucesión $\{ x_n , n = 1,2\ 3, \ldots N \}$ es finita, y por lo tanto, acotada.

qed

4.3 **Teorema.** Toda combinación lineal de sucesiones convergentes, en un espacio lineal normado, es convergente.En otras palabras, la clase CS(X) formada por las sucesiones convergentes en X, es un subespacio del espacio BS(X) formado por la sucesiones acotadas.

(4.4) $$\begin{array}{l} x_n \to x , \\ y_n \to y \end{array} \quad \Rightarrow ax_n + by_n \to ax+by , \ a,b \ \varepsilon \ \mathbf{R}$$

Demostración. Sean $\{ \mathbf{x_n} \}$, $\{\mathbf{y_n} \}$ dos sucesiones que convergen hacia **x, y,** respectivamente.
Es decir, dado $\epsilon > 0$,existe N natural , tal que si $n \geq N$, entonces

$$|| \mathbf{x_n} - \mathbf{x} || < \epsilon \ , \ || \mathbf{y_n} - \mathbf{y} || < \epsilon.$$

Entonces,

$$\| (\mathbf{x_n} + \mathbf{y_n}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \| \leq \| \mathbf{x_n} - \mathbf{x} + \| \ \| \mathbf{y_n} - \mathbf{y} \| < 2 \epsilon .$$

Esto demuestra que el límite de la suma de dos sucesiones convergentes, converge a la suma de los límites de las sucesiones.
De manera análoga se demuestra que el producto de un real y una sucesión convergente, converge al producto del real y el límite de la sucesión.

(4.5) $$|| cx_n - cx || = |c| \, || x_n - x || < |c| \, \varepsilon$$

qed

4.4-Teorema El producto interno de dos sucesiones convergentes, en un espacio con producto interno, es una sucesión convergente, de números reales. Además, el límite del producto interno de las sucesiones es igual al producto interno de los límites de las sucesiones.

(4.6) $\quad x_n \to x \quad \Rightarrow$

$\quad y_n \to y \qquad \lim (x_n \,.\, y_n) = \text{lím}\, x_n \,.\, \text{lím}\, y_n$

Demostración,. Sea X un espacio con producto interno, y $\{\mathbf{x_n}\}$, $\{\mathbf{y_n}\}$ dos sucesiones que convergen a $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, respectivamente . Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un natural N, tal que si n≥N, entonces

$$\|\mathbf{x_n} - \mathbf{x}\| < \epsilon \;, \quad \|\mathbf{y_n} - \mathbf{y}\| < \epsilon$$

Luego,

$$|\mathbf{x_n}.\mathbf{y_m} - \mathbf{x}.\mathbf{y}| = |(\mathbf{x_n} - \mathbf{x}).\,\mathbf{y_n}| + |\mathbf{x}.(\mathbf{y_n} - \mathbf{y})|$$

$$\leq \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\|,$$

por la desigualdad de Schwarz .

La sucesión $\{ y_n \}$, es convergente , luego, es acotada, es decir, existe un real positivo M >0, tal que $||\, y_n \,|| \leq M$.

Luego,

$$|x_n .y_n - x .y| \leq M\epsilon + \|x\|\,\epsilon = (M + ||\, x \,||\,)\epsilon$$

qed

5.-Sucesiones de Cauchy.

Debido a que todo espacio lineal normado **es** un espacio métrico con métrica

$$d(x,y) = ||x-y||,$$

podemos definir una sucesión de Cauchy, en la siguiente forma

Una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en el espacio lineal normado X, es **una sucesión de Cauchy,** si dado $\epsilon > 0$ existe un número natural N, tal que si n > N y m> N entonces

(5.1) $$||\, x_m - x_n \,|| < \epsilon.$$

Las preguntas naturales son ¿Que relación existe entre las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes? ¿Es toda combinación lineal de sucesiones de Cauchy, una sucesión de Cauchy?

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del teorema 1.3

5.1 Teorema Toda sucesión convergente es de Cauchy.

(5, 2) $\quad CS(X) \subset Ca(X)$.

Demostración Sea $\{ x_n \}$ una sucesión que converge a x, es decir ,dado $\epsilon>0$ existe un natural N, tal que $n >N$, entonces, $|| x_n- x|| <\epsilon$.
Sea $m> N$, $n > N$, entonces $|| x_m - x|| < \epsilon$, $|| x_n - x||< \epsilon$ .lo cual implica que,

$$|| x_m - x_n|| \leq || x_m-x||+|| x-x_n|| < 2\epsilon$$

qed

No toda sucesión de Cauchy es convergente.

5.2 Teorema Toda sucesión de Cauchy, es acotada
La demostración es análoga a la del teorema 1.3.

Demostración
Sea $\{x_n \}$ una sucesión de Cauchy, es decir , dado $\varepsilon>0$ existe un número natural N, tal que si $m,n >N$, entonces

$$|| x_m - x_n||< \varepsilon$$

luego

$$|| x_n- x_N||<\varepsilon,$$

lo cual implica que

$$|| x_n|| \leq || x_n - x_N|| +|| x_N|| .$$

El conjunto $x_1, x_2 \ldots x_N$, es finito y por lo tanto acotado.

qed

5.3 Teorema Toda combinación lineal de dos sucesiones de Cauchy, es una sucesión de Cauchy.

(5.) $\quad \{x_n \} , \{yn \} \varepsilon Ca (X) \Rightarrow \quad a\{ x_n \} + b\{ y_n \} \varepsilon Ca (X) , a,b \varepsilon \mathbf{R}$

Demostración Sean $\{x_n \}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones de Cauchy en X, es decir, dado $\varepsilon>0$ existe un natural N tal que si $n> N$ entonces

$$|| x_n - x || < \varepsilon \quad || y_n -y || < \varepsilon.$$

Luego

$$|| ax_n+by_n -(ax+ by)|| < |a| ||x_n - x|| + |b| || y_n -y||$$
$$< |a|\varepsilon+ |b|\varepsilon.$$

qed

Subsucesiones

Sea $n_1 < n_2 < n_3 <$..una sucesión estrictamente creciente de números naturales.La sucesión $\{ x_{nk}\} = x_{n1} , x_{n2} , x_{n3} ,\ldots$.es una **subsucesión de $\{ x_n\}$.**

Definición Una subsucesión $\{x_{nk}\}$ de una sucesión $\{x_n\}$, **converge** a un punto x, si dado $\varepsilon > 0$ existe un índice K en **N**, tal que si $k > K$, entonces, $||x_{nk} - x|| < \varepsilon$.

Ejemplos

5.1-Las sucesiones $\{0\} = 0,0,0,\ldots$ y $\{1\} = 1,1,1,\ldots$ son subsucesiones de la sucesión $\{x_n\} = 0,1,0,1,0,1,\ldots$

5.2- La sucesión $\{2n\} = 2,4,6,$ **..** es una subsucesión de la sucesión $\{n\} = 1,2,3,4,\ldots$

5.3- La sucesión $\{n^2\} = 1,4,9,..$ es una subsucesión de la sucesión $\{n\}$.

5.4 Teorema Toda subsucesión $\{x_{nk}\}$ de una sucesión convergente, $\{x_n\}$ es convergente.

Demostración Supongamos que $\{x_n\}$ converge a x, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe un natural N, tal que si $n > N$ entonces $||x_n - x|| < \epsilon$.
Si $k > N$, entonces $n_k > n_N > N$,
luego

$$||x_{nk} - x|| < \varepsilon$$

qed

No toda sucesión con una subsucesión convergente es convergente.

5.4 Ejemplo La sucesión $\{x_n\} = 1,0,1,0,1,0,\ldots$tiene una subsucesión convergente, $\{1\} = 1,1,1,..$, pero la sucesión misma, no es convergente.

Pero una sucesión de Cauchy, con una subsucesión convergente, es convergente.

5.5 Teorema Una sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy, con una subsucesión $\{x_{nk}\}$ convergente es convergente.

Es consecuencia del teorema **1.6.**

6.-Espacios Métricos Completos.

Un espacio métrico X, es **completo**,si toda sucesión de Cauchy es convergente. En la siguiente sección demostraremos que el espacio lineal normado (**R,| |**) de los reales., es completo.

6.1 Teorema En un espacio métrico compacto, toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Demostración Sea X un espacio métrico compacto y $\{ x_n \}$ una sucesión en X.Si el conjunto

$$S=\{ x_n : n= 1,2,..\}$$

formado por los términos de $\{ x_n \}$ es finito, algún término se repite un número infinito de veces, en los lugares

$$n_1 <,n_2 <,...n_k <, ...$$

La subsucesión $\{x_{nk}\}$ formada por la repetición de este término es una subsucesión convergente.
Si el conjunto S es infinito, S tiene un punto de acumulación, por el teorema 6.3 del cap III, luego, existe una subsucesión que converge al punto de acumulación .

qed

6.2 Teorema Todo espacio métrico compacto, es completo.

(6.1) X es compacto $\Rightarrow$ X es completo.

Demostración. Sea $\{x_n \}$ una sucesión de Cauchy en el espacio compacto X.
Pero en un espacio métrico compacto toda sucesión tiene una subsucesión convergente.
Pero por el teorema 5.5, una sucesión de Cauchy, que tiene una subsucesión convergente, es convergente.

qed

6.2 Teorema Un subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo.

X es completo $\Rightarrow$ C es completo.
C es subespacio cerrado de X

Demostración Sea $\{ \mathbf{x_n} \}$ una sucesión de Cauchy en C, entonces $\{ x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, en X.Pero X es completo, luego existe x en X tal que $x_n \rightarrow x$.
Entonces x es punto de contacto de C, pero C es cerrado, por hipótesis, luego $x \varepsilon C$.

qed

7.-Sucesiones de Números Reales

En esta sección, vamos a demostrar que toda sucesión monótona y acotada de números reales es convergente y que el espacio métrico de los reales **R,** es completo.

Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales es **creciente** (**decreciente)** , si
(7.1) $\qquad x_n \leq x_{n+1}$, $\qquad (x_n \geq x_{n+1})$, para n = 1,2,3,….
Una sucesión creciente ó decreciente recibe el nombre de **monótona.**

7.1 **Ejemplo.** La sucesión $\{ 1 / n \}$= 0, 1,1/2,1/3, …es decreciente.

7.2 **Ejemplo**. La sucesión $\{n\}$ = 1,2,3,… de los números naturales, es creciente.

El **límite superior** de una sucesión acotada $\{x_n\}$ de números reales, es

(7.2) $$\text{lím sup}_n\, x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k\,.$$

El **límite inferior** de una sucesión acotada $\{ x_n \}$, es

(7.3) $$\text{lím inf}\ x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k\,.$$

7.3 **Ejemplo**. El límite inferior de la sucesión { 0,1,0,1,0,….} es cero, su límite superior es uno.

7.1 **Teorema de Convergencia Monótona** .Toda sucesión monótona y acotada de números reales, es convergente .Si es creciente converge a su cota superior mínima (supremum) y si es decreciente, converge a su cota inferior máxima. (infimum).

Demostración. Sea $\{ x_n\}$ una sucesión monótona creciente y acotada .Sea x el supremum de $\{ x_n \}$.Entonces ,dado $\epsilon>0$, existe x_N tal que
$$x - \epsilon < x_N < x\,.$$
Dado que la sucesión es creciente
$$x - \epsilon < x_n < x\,, \text{ para toda } n \geq N\,.$$
Lo cual nos dice que la sucesión $\{ x_n\}$ converge a x.

qed

Para demostrar que el espacio de los reales **R, es un espacio lineal normado completo** usaremos el teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma que toda sucesión acotada de números reales**,** tiene una subsucesión convergente.
La distancia d , que aparece en la demostración del siguiente lema, es $d(x,y) = | x- y|$, en el espacio **R** de los reales y es $d(x,y) = || x-y ||$, si el espacio X, es un espacio lineal normado.

7.2 **Lema**. En un espacio métrico, un punto de acumulación x de una sucesión $\{x_n\}$ es el límite de una subsucesión convergente $\{x_{nk}\}$ de $\{x_n\}$, cuyos términos son diferentes dos a dos.

Demostración. La bola B(x,1), con centro en x y radio 1, contiene una infinidad de puntos de $\{x_n\}$.
Sea x_{n1} un elemento de B(x,1).El punto x es punto de acumulación del conjunto $\{ x_n, n > n_1\}$.Consideremos la bola abierta B(x , ½), con centro en x, y radio ½.Luego, existe un punto x_{n2} con $n_2 > n_1$ tal que $d(x, x_{n2}) < ½$. En esta forma construimos una subsucesión $\{ x_{nk}\}$,de $\{ x_n\}$, tal que $d(x, x_{nk}) < 1/k$. Claramente la subsucesión $\{x_{nk}\}$, converge a x.

qed

7.3 **Teorema**.(Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión acotada de números reales, tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Sea $\{ x_n \}$,una sucesión acotada. Si el conjunto

$$A = \{ x_n , n = 1,2,3,\ldots\ldots\},$$

formado por los términos de $\{ x_n \}$,es finito, alguno de sus términos se repite indefinidamente. La subsucesión formada por este término, es una subsucesión convergente.
Si el conjunto A, es infinito, entonces, es infinito y acotado, por la hipótesis, luego, por el teorema de Bolzano-Weierstrass,(sección 3 del capítulo I) para conjuntos, tiene un punto de acumulación x.
Por el Lema 3.2, existe una subsucesión $\{ x_{nk} \}$de $\{ x_n\}$, que converge a x.

qed

7.4 **Teorema**. El espacio lineal normado de los reales **R**, es completo.

Demostración. Toda sucesión de Cauchy, es acotada, luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión convergente.
Pero por el torema 5.5 una sucesión de Cauchy, que tiene una subsucesión convergente,es convergente.Luego, toda sucesión de Cauchy, de números reales es convergente.

qed

Ejercicios

1.-En un espacio lineal normado X, si lím $x_n = x$, lím $y_n = y$, entonces

$$\lim d(x_n ,y_n) = d (x, y)。$$

2.-Un punto x en un espacio lineal normado X, es un **punto límite de** una sucesión $\{ x_n \}$, si existe una subsucesión de $\{ x_n \}$ que converge a x.

a) Demostrar que un punto x es un punto límite de una sucesión si y sólo si, cada vecindad de x, contiene una infinidad de puntos de la sucesión.

b) Una sucesión convergente tiene solamente un punto límite

c) Si x es punto límite de una sucesión de Cauchy, entonces la sucesión de Cauchy converge a x.

3.- Demostrar que el espacio $\mathbf{X = R^n}$, formado por n-adas de números reales, con la norma uniforme, $|| x || = \max \{ |x_i|, i = 1,2, \dots n\}$, es un espacio métrico completo.

4.- El espacio métrico discreto, es completo.

5.- El espacio métrico C[a,b], formado por las funciones continuas reales definidas en el intervalo cerrado [a,b], con la métrica uniforme , es completo.

6.- El espacio BS(**R**) formado por las sucesiones acotadas $x = \{ x_n \}$, de números reales, con la métrica uniforme $d(x,y) = \sup \{ |x_n - y_n|, n = 1,2,\dots\}$, es un espacio métrico completo.

7.- El producto cartesiano de dos espacios métricos completos, es un espacio métrico completo.

8.-(este ejercicio requiere ciertos conocimientos de Geometría Diferencial).

La esfera unitaria $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, es un espacio métrico completo.(no lineal).

9.- No todo espacio métrico completo es compacto.

10.-Una sucesión acotada de números reales es convergente si y sólo si su límite inferior y su límite superior , son iguales.

8.-Puntos Fijos. Teorema del Punto Fijo de Banach

En esta sección vamos a demostrar que toda contracción de un espacio métrico completo, tiene uno y sólo un punto fijo.

Una **contracción** de un espacio métrico X, es una función $f : X \to X$, para la cual existe un número r en el intervalo abierto (0,1), tal que

(8.1) $$d(f(x), f(y)) \leq r\, d(x, y).$$

Ejemplos.

1.- La función lineal $f(x) = x/2$: **R**$\to$ **R**, es una contracción de **R.**

2.- Una transformación lineal T: $\mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$, cuya norma es menor que uno, es una contracción de **R.**

Un **punto fijo de** una función $f : X \to X$, es un punto x de X, tal que $f(x) = x$.

8.1 Teorema (Banach) Sea $f : X \to X$ una contracción del espacio métrico completo X. Entonces, f tiene un punto fijo y sólo uno.

Demostración Sea x_0 un punto arbitrario de X. Definamos la sucesión $\{x_n\}$ en la siguiente forma $x_n = f(x_{n-1})$, n= 1,2,3,….

Entonces, $d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq r\, d(x_1, x_0)$.

Procediendo en esta forma , obtenemos

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq r^n d(x_1, x_0),\ n = 1,2,3,...$$

Sea m > n, entonces

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq r^m d(x_1, x_0) + r^{m-1} d(x_1, x_0) + \ldots\ldots r^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &\leq r^{n-1} d(x_1, x_0)/ 1-r. \end{aligned}$$

Dado que $r < 1$, la última sucesión converge a cero, y por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Pero X es un espacio métrico completo, luego, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. Sea x el límite de $\{x_n\}$.Entonces x es un punto fijo de f. En efecto

$$x = \text{lím}_n\, x_n = \text{lím}_n\, f(x_n) = f(x),$$ por la continuidad de f.

Sean x, y dos puntos fijos diferentes de f. Entonces

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y) = r d(f(x), f(y)),$$

luego, $r \geq 1$, contrario a la hipótesis $r < 1$.

qed

8.2 Corolario Sea **C** un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo X, y $f : C \to C$ una contracción de C.Entonces f tiene un punto fijo y sólo uno en C.

8.3 Corolario. Una contracción en un espacio métrico compacto tiene uno y sólo un punto fijo en X.

Ejercicios

1.- i)Demostrar que el espacio euclidiano $\mathbf{R^n}$ de dimensión n, es completo

ii) Demostrar que el espacio l_2, formado por las sucesiones $\{ x_n\}$ de números reales, tales que la serie $\Sigma_n x^2_n$ converge, es un espacio lineal normado completo.

iii)¿ Tiene la función $f(x) = x/2$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, un punto fijo**?**

2.- La función $f(x) = x/2 + 7 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tiene un punto fijo y sólo uno**.** Encontrar dicho punto.

3.- Una transformación lineal $T : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$, con norma menor que uno,tiene un punto fijo.¿ es el punto fijo único?. Encontrar un punto fijo de T.

4.- Toda contracción de un espacio métrico es uniformemente continua.

5.- Sea x_0 un punto arbitrario de un espacio métrico X, y $f : X \to X$ una contracción de X.Probar que la sucesión $\{ x_n\}$ definida por $x_n = f(x_{n-1})$,n = 1,2,3, … es una sucesión de Cauchy. ¿Es tal sucesión convergente?.

IV. - Funciones Continuas en Espacios Métricos

En este capítulo, estudiaremos algunas propiedades de las funciones continuas. Una función continua preserva la compacidad, y la conexidad de un conjunto, es decir, la imagen de un conjunto compacto (conexo), bajo una función continua es compacto (conexa). La continuidad puede definirse en términos de conjuntos abiertos, y de conjuntos cerrados.

Una función continua sobre un compacto, es acotada. Además, una función real, definida sobre un conjunto compacto, asume sus valores máximo y mínimo.

En la primera sección estudiaremos la continuidad de funciones que toman valores en un espacio métrico.

En la segunda sección estudiaremos las funciones continuas con valores en un espacio lineal normado

En la tercera sección estudiaremos algunas propiedades de las funciones lineales.

En la cuarta sección estudiaremos la continuidad de funciones reales.

En la sección 5, estudiamos algunas propiedades de las funciones uniformemente continuas. Toda función continua sobre un espacio compacto, es uniformemente continua.

1.- Funciones Continuas en Espacios Métricos

Vamos a considerar dos espacios métricos (X, d) , (Y, d*) . Sean A un subconjunto abierto de X y $f : A \to Y$, una función definida en el subconjunto A de X , que toma valores en el espacio métrico Y El conjunto A es el **dominio** de la función f y Y es el **codominio** de f.

El conjunto

(1.1) $$f(A) = \{f (x) : x \in A\} ,$$

es la **imagen** de A bajo f. Fig 1.1

Sea B un subconjunto de Y. La **imagen inversa de B bajo f,** es el conjunto

(1.2) $$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$$

de puntos de X, cuya imagen está en B.

Ejemplo Fig # 1.2

Sea $\mathbf{f : A\to R}$ una función real de variable real y c un punto de $A\subset \mathbf{R}$. Sabemos por los cursos de Cálculo que el límite de f ,cuando x tiende (o se acerca) al punto c de A, es el real b , si dado $\varepsilon>0$ existe un real positivo $\delta>0$ tal que si $|x-c| <\delta$ entonces $|f(x) - b|<\varepsilon$.

Es decir , en símbolos

(1.3) $\lim_{x \to c} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Queremos encontrar una definición equivalente de límite que nos permita definir la noción de límite en un espacio métrico.

Debido a que la distancia entre dos puntos x,c es

(1.4) $$d(x,c) = |x-c| ,$$

podemos escribir , la expresión

(1.5) $$\lim_{x \to c} f(x) = b,$$

en la forma :

(1.6) dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,c) < \delta$ entonces $d(f(x), b) < \varepsilon$.

Tambien sabemos que la bola abierta con centro en c , y radio $\varepsilon > 0$.

(1.7) $$B(c,\delta) = \{ x \,\varepsilon\, A : d(x,c) < \delta \} .$$

.

Entonces podemos escribir la expresión (1.3)) en la forma:

Dada una bola abierta $B(b, \varepsilon)$ con centro en b y radio positivo $\varepsilon > 0$ existe una bola abierta $B(c,\delta)$ contenida en la imagen inversa bajo f de $B(b, \varepsilon)$.

Esta forma de la definición de límite de una función ,es el podemos generalizar a un espacio métrico.

Definición Sea A un subconjunto abierto del espacio métrico X y $f : A \to Y$ una función con dominio A y codominio Y.

El **límite** de una función $f: A \to Y$ cuando x se acerca o tiende a c, es el punto b de Y, si dado $B(b, \varepsilon)$ existe $B(c, \delta)$ tal que

(1.8) $$B(c,\delta) \subset f^{-1}(B(f(c), \varepsilon)).$$

Definición Una función $f : A \to Y$, es **continua en el punto c** de A,si

(1.9) $$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

es decir,si dado $\epsilon > 0$ existe un real positivo $\delta > 0$, tal que si $d(x,c) < \delta$, entonces

(1.10) $$d^*(f(x), f(c)) < \epsilon$$

Fig 1.1

Es decir, f es **continua** en un punto c de A, si para cada bola abierta. $U = B(f(c);\epsilon)$ con centro en f (c) , de radio positivo $\epsilon > 0$, existe una bola abierta $V = B(c;\delta)$ con centro en c, y radio positivo, $\delta > 0$,contenida en la imagen inversa bajo f de la bola U.

Una función es **continua,** si es continua en cada punto de X.
Una función es **continua en el subconjunto** A de X, si lo es en cada punto de A.
Vamos a denotar por C (A , Y) la clase de las funciones continuas con dominio A y codominio Y , y por $C_c(A,Y)$,la clase de las funciones continuas en el punto c de A.

Ejemplos

1.1.- Las funciones lineales $f(x) = ax + b$: **R** $\rightarrow$ **R,** reales de variable real**,** son continuas.

1.2.- Las funciones 1, x, x^2 … x^n : **R** $\rightarrow$ **R,** son continuas.

1.3.- Las funciones polinomiales son funciones continuas

1.4- . Toda transformación lineal T: $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$**,** de un espacio euclidiano $\mathbf{R}^m$ dimensión finita m, en otro espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$**,** de dimensión n, es continua.

1.5 **Ejemplo Procesos Estocásticos Continuos.**
Sea (Ω , Σ, P), un espacio con una medida de probabilidad, y $L_2(\Omega)$, el espacio de Lebesgue, formado por las funciones medibles $f : \Omega \rightarrow$ **R,** cuyo cuadrado es integrable.
Una función f: $[a,b] \rightarrow L_2(\Omega)$, que asigna a cada punto $t \epsilon [a,b]$,una variable aleatoria (función medible) f(t), con varianza finita, es un **proceso estocástico de segundo orden.**
La notación usual es **{ X(t)**: $t \epsilon [a,b]$ }.Si f es continua, el proceso estocástico $\{X(t): t\epsilon [a,b]\}$, es un proceso estocástico **continuo**.

1.6 Ejemplo Las funciones $f(x,y) = 2x + 3y + 5$, $g(x,y) = x^2 + y^2$, son continuas.

1.1 **Teorema**. (**Preservación de la Convergencia**). Sea $f : X \to Y$, una función continua en el punto c de X. Sea $\{ x_n \}$ una sucesión de puntos que converge a c.Entonces, si f es continua en el punto c, $f(x_n)$ converge a $f(c)$.

$$(1.11) \qquad \begin{matrix} f \in C_c (X, Y) \\ x_n \to c \end{matrix} \Rightarrow f(x_n) \to f(c).$$

Demostración. La función $f \in C_c (X ,Y)$ es continua en el punto c, por hipótesis, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d (x, c) < \delta$ entonces

. $$d^* (f(x), f (c)) < \epsilon.$$

Ahora, la sucesión $\{ x_n \}$ converge a c, es decir, dado $\delta > 0$, existe un índice N, tal que si $n \geq N$, entonces $d (x_n , c) < \delta$.

Sea $n \geq N$, entonces $d (x_n , c) < \delta$, de donde concluimos que

$$d^* (f (x_n) , f (c)) < \epsilon.$$

En resumen, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$, entonces

$$d^* (f (x_n) , f (c)) < \epsilon .$$

lo cual implica

$$\lim_{x_n \to c} f(x) = f(c).$$

qed

Una función f es **secuencialmente continua en el punto x,** si la convergencia de $\{x_n \}$ a x, implica la convergencia de $\{ f (x_n)\}$ a $f(x)$.

Hemos demostrado que toda función continua es secuencialmente continua. El recíproco también es cierto.(Véase el corolario 1.4)

Nuestro siguiente paso será caracterizar a las funciones continuas en términos de conjuntos abiertos y de conjuntos cerrados.

1.2 **Teorema**. (**Continuidad Global**) Sean X, Y dos espacios métricos.Una función $f : X \to Y$, es continua sí y sólo sí, la imagen inversa bajo f, de todo conjunto abierto V en Y ,es abierto en X.

$$(1.12) \qquad f \in C (X , Y) \Leftrightarrow f^{-1}(V) \text{ es abierto en X, si V es abierto en Y.}$$

Demostración. Supongamos que $f \in C (X , Y)$, y sea V un abierto en Y. Queremos demostrar que $f^{1} (V)$, es abierto en X. Sea c un punto de $f^{-1}(V)$, entonces $f(c) \in V$.

Pero V es abierto, por hipótesis , luego, existe una bola abierta B* con centro en f (c) de radio positivo $\epsilon > 0$, contenida en V. Dado que f ϵ C(X, Y), existe una bola B ,con centro en c y radio positivo $\delta>0$, contenida en la imagen inversa de B*, bajo f

$$B \subset f^{-1} (B^*) \subset f^{1}(V).$$

Es decir, f^{-1} (V) , es abierto en X.

Supongamos ahora que la imagen inversa bajo f, de todo abierto V en Y, es abierto en X. Queremos demostrar que f ϵ C (X, Y).

Sea c ϵ X y consideremos la bola abierta V, con centro en f (c) y radio positivo $\epsilon > 0$. V es un conjunto abierto en Y, luego por hipótesis la imagen inversa f^{-1} (V), de V bajo f, es abierta en X. Luego , existe una bola abierta B (c;δ) $\subset f^{-1}$(V),con centro en c, contenida en la imagen inversa f^{-1}(V), lo cual implica que f ϵ C (X, Y).

. **qed**

1.3 Corolario Una función f : X$\rightarrow$ Y, del espacio métrico X en el espacio métrico Y, es continua si y solo si la imagen inversa de todo cerrado en Y es cerrada en X.

(1.13) f ε C (X,Y) $\Leftrightarrow$ f^{-1}(C) es cerrado en X, para todo cerrado C en Y

Demostración Supongamos que la función f es continua. Sea C un conjunto cerrado en Y. Queremos demostrar que la imagen inversa de C bajo f, es cerrada en X. El complemento Y-C de C es un abierto en Y y f es continua por hipótesis , luego, la imagen inversa f^{-1} (Y-C) = X- f (C) es abierta en X,por el teorema 1.2,lo cual implica que f^{-1} (C) es cerrado en X.

Supongamos ahora que la imagen inversa f^{-1}(C) de todo cerrado C en Y es cerrado en X.Querermos demostrar que f es continua. Sea B un abierto en Y, entonces el complemento Y-B de B es cerrado. Por hipótesis ,

$$f^{-1}(Y-B) = X-f^{1} (B)$$

es cerrado en X, luego f^{-1}(B) es abierto en X, lo cual implica por el teorema 1.2 que f es continua.

qed

1.4 **Corolario** Una función f : X$\rightarrow$ Y del espacio métrico X en el espacio métrico Y, es continua si y solo si es secuencialmente continua.

(1.14) $$f \varepsilon C(X,Y) \Leftrightarrow \lim_{x_n \rightarrow c} f(x) = f(c), c \varepsilon X.$$

Demostración Supongamos que f es secuencialmente continua, es decir si $x_n \rightarrow c$ entonces $f (x_n) \rightarrow f(c)$. Queremos demostrar que f es continua en c

Sea C un conjunto cerrado en Y y c un punto de contacto de $f^{-1}(C)$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ en $f^{-1}(C)$, tal que $x_n \to c$.
Pero f es secuencialmente continua por hipótesis, luego $f(x_n) \to f(c)$.Dado que C es cerrado, $f(c) \varepsilon C$, y en consecuencia $c \varepsilon f^{-1}(C)$ .Por el corolario 1.3 la función f es continua.

qed

Una **vecindad abierta de un punto x en X,** es un conjunto abierto que contiene a x.
Una **vecindad de un punto x en X,** es un conjunto que contiene a una vecindad abierta del punto.

1.5 **Corolario** Una función $f : X \to Y$, es continua en el punto c de X ,si y sólo si ,la imagen inversa de toda vecindad de f(c), es una vecindad de c.
(1.15) $f \varepsilon C(X,Y) \Leftrightarrow f^{-1}(V)$ es vecindad de c , para toda V vecindad de f(c)

1.6 **Teorema**.(Preservación de la Compacidad) La imagen bajo una función
$f \in C(X, Y)$
continua de un conjunto compacto K en X, es compacto en Y.

(1.16) K es compacto en X $\Rightarrow$ f(K) es compacto en Y .
$f \in C(X, Y)$
$K \subset X$

Demostración. Sea $\Gamma = \{A_i, i \in I\}$ una cubierta abierta de f (K).
La función $f \in C(X,Y)$es continua, por hipótesis,
luego,
$f^{-1}(A_i)$, es abierto en X , y $\{f^{-1}(A_i), i \in I\}$ es una cubierta abierta de K.

Pero K es compacto, por hipótesis, luego, existe una subcubierta finita $\{f^{-1}(A_i), i = 1,2, \ldots n\}$ de K
Es decir

$$K \subset \cup f^{-1}(A_i), i = 1,2,3,\ldots n..$$

Luego,

$$f(K) \subset \cup f(f^{-1}(A_i)) \subset \cup A_i \;, i = 1,2,3,\ldots n$$

qed

1.7 Corolario Una función continua, $f \in C(X,Y)$ sobre un espacio métrico compacto, es acotada.
Demostración X es compacto y f es continua , por hipótesis,
luego, f(X) es compacto, por el teorema 1.6
lo cual implica que f(X) es acotado, por el teorema 6.3 cap II.

qed

Composición de Funciones

Definición Sean X, Y, Z tres espacios métricos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, dos funciones
La **compuesta** de f y g es la función $g_o f : X \to Z$, definida por

(1.17) $$(g_o f)(x) = g(f(x)).$$

fig 1.1

1.8 **Teorema**. La compuesta de dos funciones continuas, es una función continua.

(1.18) $$\begin{array}{l} f \in C_a(X,Y) \\ g \in C_{f(a)}(Y, Z) \end{array} \Rightarrow g_o f \in C_a(X, Z)$$

Demostración. La función $g \in C_{f(a)}(Y, Z)$,es continua en el punto f(a) de Y, es decir , dado $\eta > 0$, existe $\varepsilon > 0$, tal que si $d(y, f(a)) < \varepsilon$, entonces $d(g(y), g(f(a))) < \eta$.
Pero, $f \varepsilon C_a(X,Y)$, es continua en el punto a de X, es decir ,dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $d(x,a) < \delta$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, lo cual implica que $d^*(g(f(x)), g(f(a))) < \eta$.
Resumiendo, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $d(x,a) < \delta$, entonces
$$d^*(g(f(x)), g(f(a))) < \eta .$$
qed

1.9 Teorema (Preservación de la Conexidad) La imagen bajo una función continua de un conjunto conexo, es conexa.

(1.19) $$\begin{array}{l} f \ \varepsilon \ C(X;Y) \\ C \text{ es conexo en } X \end{array} \Rightarrow f(C) \text{ es conexo.}$$

Demostración Sea **C** un conjunto conexo en el espacio lineal normado X, y sea $f \varepsilon C(X,Y)$ una función continua de X en el espacio lineal normado Y. Supongamos que f(C) es inconexa, es decir, existen dos conjuntos U,V, abiertos en Y cuyas intersecciones con f (C) son ajenas , no vacías y
$$f(C) = (U \cup V) \cap f(C).$$

Por ser f continua los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{1}(V)$ son abiertos y sus intersecciones con C, son ajenas , no vacías, y además

$$C \subset f^{-1} f(C) = f^{-1}[(U \cup V) \cap f(C)] = [f^{1}(U) \cup f^{1}(V)] \cap C,$$

lo cual implica que C es inconexo.

qed

Ejercicios

1.- Si A está contenido en B, entonces la imagen inversa de A, bajo una función f, está contenida en la imagen inversa de B.

2.- La imagen inversa bajo f, de la unión de una familia de conjuntos $\{ A_i , i \in I \}$, es igual a la unión de sus imágenes inversas.

3.- Sea $f(x) = 2x + 3$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **.** Calcular la imagen inversa bajo f, del intervalo abierto (0,1).

4.- La transformación lineal $\mathbf{T}(x, y) = (2x + 3y, 3x - 4y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, es una función continua.

5.- Un **homeomorfismo** del espacio métrico X sobre el espacio métrico Y, es una función biyectiva y continua de X sobre Y, cuya inversa es continua.
i) los homeomorfismos de X sobre X , forman un grupo.
ii) la relación " homeomorfo a " es una relación de equivalencia.
iii) ¿Es la recta **R, homeomorfa** al intervalo abierto **(0,1) ?**

6.- Una **isometría** de un espacio métrico X sobre un espacio métrico Y, es una función biyectiva de X sobre Y , que preserva distancias.
i) La composición de dos isometrías es una isometría.
ii) La imagen isométrica de un conjunto compacto, es compacta.
iii)La imagen isométrica de un abierto, es abierta.
iv) La imagen homeomorfa de un cerrado, es cerrada.

2.- Funciones Continuas con Valores en un Espacio Lineal Normado

En esta sección vamos a considerar funciones $f, g \in (X, Y)$, cuyo dominio es un espacio lineal normado $(X, |\ |)$, y cuyo codominio es un espacio lineal normado $(Y, \|\ \|)$. En este caso podemos definir la suma de dos funciones y el producto de un escalar $c \in \mathbf{R}$ y una función $f : X \to Y$.

La **suma** de dos funciones $f, g : X \to Y$, es la función $f + g : X \to Y$, definida cómo

$$(2.1) \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in X.$$

El producto de un escalar $c \varepsilon$ R y una función f: X → Y, es la función cf : X→ Y , definida por

(2.2) $$(cf)(x) = cf(x).$$

Si el espacio lineal normado Y, tiene un producto interno, podemos definir el producto interno de dos funciones.

El **producto interno(ó producto punto) de dos funciones** f, g : X→ Y , es la función real f . g : X → **R**, definida por

(2.3) $$(f.g)(x) = f(x) . g(x).$$

Funciones Continuas

Dado que un espacio lineal normado X es un espacio métrico cuya función distancia es

(2.4) $$d(x,y) = \|x-y\|$$

concluímos que :

Una función f : X→Y, es **continua en el punto c**, si dado $\epsilon > 0$ existe un real positivo $\delta > 0$, tal que si $\|x - c\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(c)\| < \epsilon$

Una función es **continua en el conjunto A de X,**si es continua en cada punto x de A.Una función **es continua,** si es continua en X.

Funciones Acotadas

Una función f: X→ Y, es **acotada** si existe un real positivo M > 0, tal que

(2. 5) $$\|f(x)\| < M .$$

2.1 **Teorema**. La clase B(X,Y) de las funciones acotadas, forma un espacio lineal normado, sobre los reales. La función N : B (X ,Y)→**R,** definida por

(2. 6) $$N(f) = \sup \{\|f(x)\| : x \epsilon X.\}$$

es la norma uniforme sobre B(X , Y).

Demostración Sean f, g dos funciones acotadas, es decir, existe M > 0 tal que

$$\|f(x)\| < M, \quad \|g(x)\| < M, \text{ x en X.}$$

Entonces

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| < 2M.$$

De manera análoga se demuestra que cf(x) es acotada.

Ahora vamos a demostrar que la función N : B(X , Y) → **R**, es una norma sobre el espacio B (X, Y).

$$N(f(x) + g(x)) = \sup\{\|(f(x) + g(x)\|, x \in X\}$$

pero

$$\sup\{\|f(x) + g(x)\| \leq \sup\|f(x)\| + \sup\|g(x)\|$$

lo cual demuestra que

$$N(f+g) \leq N(f)+N(g.) .$$

De manera análoga se demuestran el resto de las condiciones, de la definición de norma.

qed

2.2 **Teorema** Toda combinación lineal de dos funciones continuas, es una función continua. Es decir, la clase C (X, Y), formada por las funciones continuas, del espacio lineal normado X en el espacio lineal normado Y, forma un espacio lineal sobre los reales.

(2.7) $$f, g \in C(X, Y) \Rightarrow a f + b g \in C(X, Y), a, b \in \mathbf{R}.$$

Demostración. f , g ϵ C (X, Y) por hipótesis , es decir , las funciones f , g son continuas en todo punto c de X , luego, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - c\| < \delta$, $c \in X$, entonces

$$\|f(x) - f(c)\| < \epsilon \quad y \quad \|g(x) - g(c)\| < \epsilon .$$

Luego

$$\|f(x) + g(x) - f(c) - g(c)\| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|g(x) - g(c)\| < 2\epsilon$$

Lo cual demuestra que la suma de dos funciones continuas, es continua.
De manera análoga se demuestra que cf es continua.

q e d

2.3 **Teorema**. Sean X ,Y dos espacios lineales normados. El espacio lineal BC (X, Y), formado por las funciones acotadas y continuas, con dominio en X, que toman valores en Y, forma un subespacio lineal normado del espacio lineal normado B (X , Y), formado por las funciones acotadas de X en Y.

(2. 8) $$BC(X,Y) \subset B(X,Y).$$

En efecto, toda combinación lineal de funciones continuas y acotadas, es continua y acotada.

qed

3.- Funciones Lineales

Los resultados que a continuación se enuncian sin demostración , se prueban en los cursos de Álgebra Lineal .
En esta sección, vamos a considerar los espacios euclidianos, $\mathbf{R^m}$ **y** $\mathbf{R^n}$, y la clase L=L($\mathbf{R^m}$, $\mathbf{R^n}$) , formada por las funciones lineales de $\mathbf{R^m}$ en $\mathbf{R^n}$.

Una función f : $\mathbf{R^m} \to \mathbf{R}^n$ de un espacio lineal normado $\mathbf{R^m}$ en otro espacio lineal normado $\mathbf{R^n}$, es una **función lineal** si satisface la condición

(3.1) $$f(ax+by) = af(x) + b(y),\ a,b\ \varepsilon\ \mathbf{R},\ x,y\ \varepsilon\ X.$$

La suma de dos funciones lineales es una función lineal, y el producto de un real c y una función lineal es una función lineal, es decir,

3.1 Proposición La clase de las funciones lineales forma un espacio lineal sobre los reales.Además la función

$$|| \ || : L(\mathbf{R^m},R^n) \to \mathbf{R}$$

definida por

(3.2) $$||f|| = \sup\{ ||f(x)|| : ||x|| \leq 1 \}$$

es una norma sobre el espacio L , formado por las funciones lineales.

Los vectores e_i , i = 1,2,…m, forman la base estandar de $\mathbf{R^m}$.
Sea

$$\mathbf{u_j},\ j= 1,2,\ldots n$$

la base estandar de $\mathbf{R^n}$. Sea y = f(x) la imagen bajo la función lineal f ε L, del punto $x = \sum x_i e_i$ de $\mathbf{R^m}$. Entonces

(3.3) $$y= f(x) = \sum_i x_i f(e_i).$$

Pero f (e_i) ε $\mathbf{R^n}$,luego, existen números a_{ji} tales que

(3.4) $$f(e_i) = \sum a_{ji}u_j .$$

Por lo cual

$$y = f(x) = (\sum a_{ij} x_i)u_j.$$

lo cual implica que las coordenadas y_i de y satisfacen la ecuación

(3.5) $$y_i = \sum a_{ij}x_j \ , \qquad i = 1.2,\dots n, j= 1,2,..m.$$

La matriz A = [a_{ij}] es la **matriz de la transformación lineal f.**
A toda función lineal f ε L($\mathbf{R}^{m.}$, $\mathbf{R}^{n}$) le podemos asociar una matríz n x m A, tal que

(3.6) $$y = f(x) = Ax \ , \ x \in \mathbf{R}^{m} .$$

Es decir

(3.7) $$y_i = \Sigma a_{ij} x_j \ , \ i = 1,2, \dots n, \ j = 1,2,..m.$$

Para toda función lineal f, existe una constante positiva M>0, tal que

(3.8) $$|| f(x)|| \leq M|| x|| , x \in \mathbf{R}^{m}.$$

En efecto, por (3.2)

(3.9) $$||f(x)|| \leq ||f|| \ || x||$$

La función $|| \ \ ||: L(\mathbf{R}^{m},\mathbf{R}^{n}) \to \mathbf{R}$, es una norma sobre el espacio L.

3.2 Teorema Toda función lineal en L es continua.

Demostración Por (3.8), $|| f(x) - f(y)|| = || f(x-y)|| \leq M|| x-y.||$
Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon /M > 0$, tal que si $||x-y|| < \delta$, entonces,
$|| f(x) - f(y)|| < \epsilon$.

qed

Hemos visto que **a** toda función lineal f, podemos asignarle una matriz A..Podemos tambien asociar a cada matriz A la transformación lineal f, definida por

(3.10) $$f(x) = Ax.$$

La **norma** de la matriz n x m A= [a_{ij}] es $||A||^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2$

Vamos a demostrar a continuación que la norma de f es menor o igual que la norma de A.

3.3 **Proposición** La norma de la función lineal **f** en **L,** es menor o igual que la norma de la matriz de f.

(3.11) $\|f\| \leq \|A\|$ donde A es la matriz de f.

Demostración Por (3.7), tenemos que

$$y_i = \sum a_{ij} x_j, \ i=1,2,3\ldots n.$$

Luego

$$y_i^2 \leq \sum_j a_{ij}^2 \sum x_j^2 \text{ por la desigualdad de Schwarz ,}$$

en consecuencia

$$\|f(x)\|^2 = \sum y_i^2 \leq \sum a_{ij}^2 \|x\|^2$$

de donde

$$\|f\| \leq \|A\|$$

qed

Ejercicios

3.1 Demostrar que el conjunto formado por las funciones lineales, forma un espacio lineal, y que la función (3.2) es una norma sobre L
3.2 Demostrar que las siguientes funciones
i) $f(x,y) = (2x+3y, 3x-2y)$ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.
ii) $f(x,y) = (2x+5y, 3x-2y, 3x+4y)$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,
a) son lineales
b) encontrar sus matrices
c) son continuas
d) calcular las normas de sus matrices.
3.3 Para toda función lineal $f \in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ en ejercicio **3.2,** existe una constante positiva M>0, tal que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$, $x \in \mathbf{R}^m$.

4.-Funciones Reales Continuas

Una función real sobre un espacio lineal normado, X, es una función cuyo dominio es X y cuyo codominio es **R.** Sea C (K), la clase de las funciones reales continuas definidas en el conjunto no vacío K contenido en X. Vamos a demostrar que si K es compacto, las funciones reales en C(K) son acotadas, y que sus valores extremos son asumidos.
Vamos a denotar por B(X) la clase de las funciones reales acotadas , definidas en X, y por B(K) la clase de las funciones reales acotadas definidas en el subconjunto K de X.

4.1. **Corolario** La clase de las funciones reales acotadas B(X), definidas sobre un espacio lineal normado X, forma un espacio lineal normado, con norma

(4.1) $$N (f) = \sup \{| f (x)| : x \in X\}.$$

Es consecuencia del teorema 1.3

4.2 **Lema** Toda función real continua sobre un compacto, es acotada.

K es compacto en X. ⇒ f ϵ B(K).
f ϵ C (K).

La norma de f, está descrita en (3.2).

Demostración. K es compacto en X, y f es continua, entonces por el teorema 3.4 de preservación de la compacidad, f(K) es compacto en los reales **R .** Entonces **,** f(K) es cerrado y acotado, por el teorema de Heine- Borel Luego, f es acotada. Es decir, existe un real positivo M, tal que

$$| f (x) | \leq M.$$

Dado que el espacio de los reales es completo, (teorema 3.4), existe una cota superior mínima, (supremum) del conjunto f (X) ={ f (x) : x ϵ X }, lo cual nos permite definir la norma uniforme (3.2) de f.

qed

Para una función real acotada los números m = inf { f(x) : x ϵ X }, M = sup { f (x) : x ϵX }, existen y son sus **valores mínimo y máximo,** respectivamente. Estos valores reciben el nombre de **valores extremos de la función f.**

4.3 **Teorema**. Una función real continua definida sobre un conjunto compacto K en el espacio lineal normado X, asume sus valores extremos, es decir, existen dos puntos u, v, en K, tales que

(4.2) $$f(u) = m , f(v) = M.$$

K es compacto. ⇒ Existen dos puntos u, v en K, tales que m = f (u),
M = f(v).
f ϵ C (K)

Demostración. Los valores extremos de la función acotada f, son puntos de contacto de f(K) .Pero K es compacto , y f es continua , luego, f (K) es compacto, por el teorema 4.6 de preservación de compacidad,

fig 4.1

Los valores extremos de f, son puntos de contacto de f(K), luego, pertenecen a f (K) ,porque por el teorema de Heine –Borel, todo compacto es cerrado

Esto implica que existen dos números reales u, v ϵ K, tales que f(u) = m, f (v) = M.

qed

Ejercicios

1.-La adición A(x,y) = x+y, y la multiplicación M(x,y) = xy :$\mathbf{R}^2 \rightarrow$ **R,** son funciones reales continuas.

2.- Una función f : X$\rightarrow$ Y, del espacio lineal normado X en el espacio lineal normado Y, es una **isometría**, si es biyectiva y preserva las distancias entre dos puntos. Es decir si $||x-y|| = ||f(x) - f(y)||$ x,y en X.

i) La compuesta de dos isometrías, es una isometría.

ii) Las isometrías de un espacio lineal normado X, forman un grupo con respecto a la composición.

iii) La imagen isométrica de un espacio lineal normado completo, es completo.

3.- Un **homeomorfismo** de un espacio lineal normado X en otro espacio lineal normado Y, es una función biyectiva y continua f : X $\rightarrow$ Y, cuya inversa es continua.

El espacio euclidiano **($\mathbf{R}^n$,d),** con la métrica euclidiana d, y el espacio ($\mathbf{R}^n$**, d***) con la métrica uniforme d*, son homeomorfos, pero no isométricos.

4.- Sea f una función continua real, definida en un espacio lineal normado X. Sea c un número real. Entonces el conjunto A = { x ϵ X: f(x) = c }, es cerrado.

5.- a) El espacio euclidiano de dimensión n, es completo.

b) Es compacto?

6.- La imagen isométrica de un espacio métrico completo, es completa.

7.- ¿ Es la imagen homeomorfa de un espacio compacto, compacta.?

8.- La imagen homeomorfa de un conjunto abierto, (cerrado),es abierta(cerrada).

9,- Encontrar los máximos y mínimos de las funciones

$$f(x) = \text{sen } x,\ g(x) = \cos x : [0, 2\pi\ ] \rightarrow \mathbf{R},$$

y los puntos donde toman esos extremos(máximos y mínimos)π

5.-**Continuidad Uniforme**

Sea f : X$\rightarrow$ Y, una función continua en el subconjunto A de X,es decir , f es continua en cada punto a de A. Por definición, dado ε >0 existe un real positivo $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$, que depende de a y de ε, tal que si $||x-a|| < \delta$ entonces $||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$

5.1-**Ejemplo** Sea $f(x) = x^2$: **R**→ **R** .Esta función es continua en **R.**
Ahora, si queremos hacer

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x+a||x-a| < \varepsilon$$

bastará tomar $|x-a| < \varepsilon / |x+a|$.
Es decir , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon / |x + a| > 0$, tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|x^2 - a^2| < \varepsilon$
Existen casos en que la δ no depende de a.

5.2-Ejemplo $f(x) = 5x + 4$: **R**→ **R.** En este caso, la desigualdad $|f(x) - f(a)| = 5|(x-a)| < \varepsilon$ es válida cuando $|x-a| < \varepsilon/5$.
Cuando la δ depende de ε , pero no depende de a, la función es uniformemente continua.

Una función $f : X \to Y$ es **uniformemente continua en el subconjunto A de X,** si dado $\varepsilon > 0$ existe un real positivo $\delta = \delta(\varepsilon)$, que depende de ε pero que no depende de los puntos x,y, tal que si x, y ε A y $d(x,y) < \delta$ entonces $d^*(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
La función es **uniformemente continua** si es uniformemente continua en todo X.

5.1 **Teorema** Una función uniformemente continua en un conjunto A de X es continua en A.
(5.1) $UC(A,Y) \subset C(A, Y)$.

5.1 Teorema (de Continuidad Uniforme). Sean X, Y dos espacios métricos, y supongamos que X es compacto. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.

$$f \, \varepsilon C(X,Y) \Rightarrow f \, \varepsilon \, UC(X).$$
$$X \varepsilon \, \mathbf{K}$$

Demostración Sea x un punto de X, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_x > 0$ tal que si la distancia $d(x,y) < \delta_x$, entonces la distancia $d^*(f(x),f(y)) < \varepsilon/2$ .La familia
(5.2) $\{B(x,\delta_x /2) : x \, \varepsilon \, X\}$,
es una cubierta abierta de X, pero X es compacto por hipótesis, luego existe una subcubierta finita

$$\{ B(x_i , \delta_{xi} /2) : i = 1,2,\ldots n\} \text{ de } X.$$

Sea $\delta = 1/2$ mínimo $\{ \delta_{xi} : i = 1,2,3,\ldots n\}$.El punto x ε X pertenece a alguna bola $B(x_k , \delta_{xk} /2)$, por lo cual $d^*(f(x), f(x_k)) < \varepsilon/2$. Sea y un punto de X, cuya distancia $d(x,y) < \delta$ a x, es menor que δ .Entonces

$$d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, x_k) < \delta + \delta_k/2 < \delta_k .$$

Es decir, el punto y pertenece a la bola que contiene a x.

Entonces $d^*(f(x), f(y)) \leq d^*(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), f(y)) < \varepsilon$.

qed

Ejercicios

5.1 Una función polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c : [0,1] \rightarrow$ **R, es** uniformemente continua**.**

5.2 Las funciones trigonométricas

$$f(x) = \text{sen } x,\ g(x) = \cos x : [0,2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$$

son uniformemente continuas.

V.- Diferenciación de Funciones Reales de una Variable Real

En este capítulo vamos a considerar funciones $f : (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$, reales definidas en un intervalo abierto (a,b), de los reales. En la primera sección definiremos el concepto de derivada de una función, y demostraremos que la derivada si existe es única y que toda función diferenciable en un punto es continua en ese punto.La suma y producto de funciones diferenciabas, es diferenciable.
En la segunda sección , se demuestra que la compuesta de dos funciones diferenciables , es diferenciable.
En la tercera sección demostramos el teorema del máximo interior.
En la cuarta sección se demuestran los teoremas del valor medio.
En la quinta sección se estudian las derivadas de orden superior y se demuestra el teorema de Taylor.
En la sección seis estudiamos las funciones vectoriales de una variable

1.- Derivada de una Función

La función $f: (a,b)\rightarrow \mathbf{R}$, **es diferenciable en el punto** c ε **(a,b),** si el límite

$$L = \lim_{h\rightarrow 0} \{[f(c+h) - f(c)]/ h\}, \tag{1.1}$$

existe.Es decir, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta$, entonces

$$|[\{f(c+h) - f(c)\} / h] - L| < \varepsilon . \tag{1.2}$$

Si el límite existe , es único, y recibe el nombre de **derivada de f en el punto c,** y se denota por $f\,'(c)$.
Una función es **diferenciable en el punto c,** si la derivada de f, en el punto c, existe.

1.1-Teorema La derivada de una función diferenciable en un punto c, es única.

Demostración Sean A, B dos derivadas de la función f en el punto c, es decir, dado $\varepsilon >0$ existe $\delta> 0$ tal que si $0<| x-c | < \delta$, entonces

$$|[\{f(c+h) - f (c)\} / h] - A| <\varepsilon , |[\{ f (c+h) - f (c)\} / h] - B| < \varepsilon.$$

De aquí concluímos que

$$| A- B| \leq |[\{f(c+h) - f (c)\} / h] - B| + |A- [\{f (c+h) - f(c)\}/ h]| \mathbf{< 2\varepsilon.}$$

Luego

$$A-B = 0 \text{ y } A= B.$$

qed

Nuestro siguiente paso será demostrar que toda función diferenciable es continua.
Una función $f : (a,b) \to$ **R,** es **diferenciable,** si es diferenciable en cada punto de (a,b).
Denotaremos por D(a,b) la clase de las funciones diferenciables, y por $D_c(a,b)$ la clase de las funciones diferenciables en el punto c.

1.2-Teorema Una función diferenciable, es continua.

(1.3) $$D(a,b) \subset C(a,b).$$

Demostración Sea $f \varepsilon D_c(a,b)$ una función diferenciable en el punto c, es decir, dado $\varepsilon = 1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |h| < \delta$ entonces
$$|[\{ f(c+h) - f(c)\}/ h] - f'(c)| < 1 .$$
Luego
$$|f(c+h) - f(c)| \leq (|f'(c)| + 1)|xh| = M|h|,$$
donde $M = 1+|f'(c)|$,
lo cual implica que f es continua en c.

qed

Si f es diferenciable en c, entonces que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0<|h| < \delta$ implica

(1.4) $$|f(c+h) - f(x) - f'(c)h| < \varepsilon|h| .$$

Sea
$$r(h) = f(c+h) - f(c) - f'(c)h,$$
entonces

(1.5) $$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + r(h),$$

donde

(1.6) $$\lim_{h \to 0} r(h) / h = 0$$

1.3 **Proposición** Una función f es diferenciable en el punto c, si y sólo si, puede escribirse en la forma (1.5) sujeta a la condición (1.6).

No toda función continua **es** diferenciable.

Ejemplo

La función $f(x) = |x| :$ **R**$\to$ **R,** es continua pero no es diferenciable, en el orígen.

Por los cursos de Cálculo, sabemos que el siguiente teorema es cierto.

1.3-Teorema La suma, la diferencia y el producto de dos funciones,f,g diferenciables, es diferenciable.Además,
la derivada de la suma es igual a la suma de sus derivadas

(1.7) $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

(1.8) $(f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)$.

(1.9) $(fg)'(c) = f'(c)\, g(c) + f(c)\, g'(c)$.

2.- Composición de Funciones. Regla de la Cadena.

Definición Vamos a considerar una función $f : (a,b)\rightarrow \mathbf{R}$ y una función $g: (c,d)\rightarrow \mathbf{R}$, tal que la imagen f(a,b) del intervalo (a,b) bajo f ,está contenida en el dominio (c,d) de g.
La **compuesta de las funciones f,g, es la fun**ción $g \circ f : (a,b)\rightarrow \mathbf{R}$. definida por

(2.1) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplos

1.-La compuesta de las funciones $f(x) = 2x + 4$ y la función $g(x) = x^2$, es la función $(g \circ f)(x)= (2x + 4)^2$.
2.- La compuesta de la función $f(x) = 2x + 3$ y la función $g(x) = \text{sen } x$, es la función $(g \circ f)(x) = \text{sen }(2x + 3)$.

2.1- Teorema (**Regla de la Cadena**)La compuesta $g \circ f$ de dos funciones diferenciables, es una función diferenciable. La derivada de la compuesta $g \circ f$ de las funciones f,g es igual a la compuesta de las derivadas.

(2.2) $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) .$$

Este es un caso particular de la Regla de la Cadena,(teorema 4.2 , Cap VII).

Demostración La función $f : (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$, es diferenciable en el punto p, es decir,

(2.3) $f(p+h) = f(p) + h f'(p) + r(h)$,

(2.4) donde $\lim_{h\rightarrow 0} r(h)/h = 0$.

La función g es diferenciable en el punto f(p), es decir

(2.4) $g(f(p) +k) = g(f(p)) + k\, g'(f(p)) + s(k)$, donde $\lim_{k\rightarrow 0} s(k) = 0$.

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) implican que

$g(f(p+h)) = g(f(p)+ h f'(p) + r(h))$ por (2.3)

$= g(f(p)) + (hf'(p) + r(h))g'(f(p)) + s(hf'(p) + r(h))$, por (2.4).

Pero por (2.3)

$$|g'(f(p))(hf'(p) + r(h))| \leq |g'(f(p))| (|f'(p)||h| + \varepsilon|h|)$$

$$\leq |g'(f(p))| (|f'(p)| + \varepsilon) |h|.$$

Por (2.4)

$$|s(hf'(p)+ r(h))| < \varepsilon | hf'(p) + r(h)| < (|f'(p)| + \varepsilon) |h|,$$

lo cual implica que $g_o f$ es diferenciable y que la diferencial de la compuesta es igual a la compuesta de las diferenciales.

qed

3.-Valores Extremos de una Función.Teorema del Máximo Interior

En esta sección demostraremos que los puntos en que una función diferenciable, toma sus valores extremos (máximo y mínimo) son puntos críticos de la función.Un punto c es **punto crítico** de una función f, si la derivada de f en c , es igual a cero.

(3.1) $$f'(c) = 0$$

3.1-**Lema** Sea $f : (a,b)\rightarrow$ **R**, una función real diferenciable y supongamos que la derivada de f en un punto $c \in (a, b)$ es positiva. Entonces existe un intervalo $(c- \delta , c + \delta)$ contenido en (a,b), tal que si $x > c$ entonces $f(x) > f(c)$ y si $x < c$ entonces $f(x) < f(c)$.

Demostración $f \in D_c (a, b)$, por hipótesis, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta >0$ tal que si $0 < | x-c| < \delta$ entonces

$$|[\{ f(x) – f(c)\} / x-c] - f'(c)| < \varepsilon,$$

lo cual implica que

$$-\varepsilon < [\{f(x) – f(c)\}/ x-c] - f'(c) < \varepsilon$$

y

$$-\varepsilon + f'(c) <\{f(x) – f(c)\} / x-c < \varepsilon + f'(c).$$

Tomando a $\varepsilon < f'(c)$ tenemos que $f(x) – f(c)$ y $x-c$ deben tener el mismo signo, es decir si $x>c$ entonces $f(x) > f(c)$, y $x<c$, implica que $f(x) < f(c)$.

qed

Una función $f : (a,b)\rightarrow$ **R**, tiene un **máximo local en el punto c de (**a,b) si existe un intervalo $I =(c- \delta , c+ \delta) \subset (a, b)$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para x en I.

Vimos anteriormente **(teorema 4.3, Cap. IV) ,** que una función continua **f** : $[a,b\,]\rightarrow$ **R,** definida sobre un conjunto compacto asume su máximo y su mínimo, es decir, existen dos puntos u, v , en [a,b] tales que

$$f(u) = \max f(x),\ f(v) = \text{mín } f(x).$$

El siguiente teorema afirma que los puntos u, v son puntos críticos de la función f.

3.2 Teorema (del Máximo Interior). Sea $f : [a,b] \rightarrow$ **R** una función diferenciable que toma su valor máximo(su valor mínimo) en el punto interior $c\varepsilon$ (a,b). Entonces $f\,'(c) =0$.

$f\ \varepsilon\ D_c\,[a,b]$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $f\,'(\,c\,) = 0$
f(c) es máximo local
c es punto interior de [a,b]

Demostración Supongamos que $f\,'(\,c\,)\neq 0$, entonces

$$f\,'(\,c\,) > 0 \text{ o bien } f\,'(c) <0.$$

Si $f\,'(c\,) >0$ por el lema 3.1, $f(x\,) > f(\,c)$ si $x > c$, lo cual nos dice que $f(\,c\,)$ no es un máximo local, y $x<c$ implica que $f(x) < f(c)$. luego f no toma su mínimo en c.
De manera análoga se demuestra el caso $f'(\,c\,) < 0$.

qed

Si el máximo no se alcanza en un punto interior, entonces la derivada no necesariamente es cero.

Ejemplo

La función $f(x) = x : [0,1]\rightarrow$ **R,** tiene un mínimo en x= 0 y un máximo en x = 1, sin embargo, la derivada $f\,'(x)= 1$, no se anula en los puntos x = 0, x = 1.

4.-Teoremas del Valor Medio

En esta sección consideramos el problema de encontrar puntos medios para funciones diferenciables.Comenzamos con el

4.1 Teorema de Rolle. Sea $f : [a,b]\rightarrow$ **R**, una función continua en [a,b] y diferenciable en (a,b).Supongamos que $f(a\,)=f(b\,) = 0$. Entonces existe un punto $c\varepsilon$ (a,b) tal que $f\,'(\,c\,) =0$.

Demostración Si f es constante, entonces $f\,'(x\,) = 0$, es la función cero, y podemos tomar $c = a+b\,/\,2$.Si f no es constante podemos suponer sin pérdida

de generalidad que f toma algunos valores positivos (considerando si es necesario al simétrico $-f$ de f ,en lugar de f).
Sea $M = \sup \{f(x): x \in [a,b]\}$ el valor máximo de f.Entonces, por el teorema 4.3 del Cap. IV, existe un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = M$.
Dado que $f(a) = f(b) = 0$,llegamos a la conclusión de que $c \in (a,b)$, es un punto interior de [a,b]. Por el teorema del máximo interior, $f'(c) = 0$

qed

Una consecuencia del teorema de Rolle es el teorema del valor medio.

4.2 Teorema (del Valor Medio) Sea f una función continua en [a,b], y diferenciable en (a,b).Entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que

(4.1) $$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demostración La ecuación de la recta que une los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$,es

$$y - f(a) = \{[f(b) - f(a)]/ b - a\}(x-a).$$

Consideremos la función $h(x) = [f(x) - f(a) - \{f(b) - f(a)\} / b - a](x-a)$. Entonces $h(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle, luego, existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, lo cual implica (4.1).

qed

4.3 Teorema(del Valor Medio de Cauchy) Sean **f, g** dos funciones continuas en [a, b] y diferenciables en (a,b).Entonces existe un número $c \in (a,b)$, tal que

(4.2) $$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Demostración Si $g(b) = g(a)$ basta elegir c de tal manera que $g'(c) = 0$.
Supongamos ahora que $g(a) \neq g(b)$ y sea
$$h(x) = f(x) - f(a) - \{f(b) - f(a)/ b-a\}(g(x) - g(a)).$$
Esta función satisface las condiciones del teorema de Rolle, es decir, la función h es continua en [a,b] y diferenciable en (a,b). Además,$h(a) = h(b) = 0$
Aplicando el teorema de Rolle a $h(x)$ se obtiene el resultado.

qed

4.4 **Teorema** Supongamos que la función f es diferenciable en (a,b).Entonces
i) si $f'(x) \geq 0$ para todo x en (a,b), f es monótona creciente.

ii) si $f'(x) = 0$ para todo x en (a,b), f es constante.
iii) si $f'(x) \leq 0$ para todo x en (a,b), f es monótona decreciente.

Demostración Sean y, z dos puntos en (a,b). Entonces f es continua en [y,z] y diferenciable en (y,z), por el teorema del valor medio, existe un punto u ε(y,z) tal que

$$f(z) - f(y) = f'(u)(z-y),$$

de donde obtenemos la conclusiones i) ii) iii).

qed

5.- Derivadas de Orden Superior.Teorema de Taylor

Sea **f: (a,b) → R,** una función diferenciable en el intervalo abierto (a,b), es decir $f'(c)$ existe en cada punto de c ε (a,b).Entonces podemos definir la **primera derivada** de f como la función $f': (a,b) \rightarrow$ **R** que asigna a cada punto c de (a,b) el número real $f'(c)$.
Si f'es diferenciable en (a,b) , podemos definir la **segunda derivada** f'' : (a,b)→**R** de f, como la primera derivada de f'.

(5.1) $$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} [\{ f'(c+h) - f'(c)/h] .$$

La tercera derivada f''' de f, se define como la primera derivada de f'', y así sucesivamente.Frecuentemente la n-ésima derivada de f, se denota por $f^{(n)}$.

5.1 Teorema Sea n= 1,2,3, … un número natural y supongamos que las derivadas $f', f'' \ldots f^{(n-1)}$ existen y son continuas en el intervalo cerrado [a,b], y que la n- ésima derivada $f^{(n)} : (a,b) \rightarrow$ **R** , existe en (a,b).Entonces para toda pareja de números c,d =c+h ε [a,b], con h>0 existe un número z ε(c,c+h) entre c y c+h tal que

(5.2) $$f(c+h) = f(c) + h f'(c) + h^2/ 2! \{f''(c) + h^3/3! f'''(c)$$
$$+ \ldots + h^{n-1}/(n-1)! f^{(n-1)}(c) + h^n/n!\{ f^{(n)}(z) .$$

Demostración Sea p(x) el polinomio

(5.3) $$p(x) = f(x) + f'(x)(d-x) + \ldots + \{f^{(n-1)}(x) (d - x)^{(n-1)}.\}/ (n-1)!.$$

y definamos un real r por medio de la ecuación

$$r\,(d\text{-}c)^n/n! = f(d) - p(c),$$

y consideremos la función g, definida en [a,b] por

(5.4) $$g(x)= f(y)- [p(x) + r(d-x)^n / n!].$$

Esta función satisface las condiciones del teorema de Rolle, luego, existe un número z en (c,d) tal g ´(z) =0, lo cual implica **(5.2).**

qed

6.- Diferenciación de Funciones Vectoriales de una Variable

Sea **[a,b]** un intervalo cerrado y Y un espacio lineal normado.Una función f : [a,b] $\rightarrow$ Y, es una **función vectorial de una variable**.
Estamos particularmente interesados en el caso en que Y es el espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$.

Definición Una función vectorial f : [a,b] $\rightarrow$ **Y, es diferenciable en el punto** c de [a,b] , si existe un vector y en Y , que cumple con la siguiente condición: dado $\varepsilon > 0$ existe un real positivo $\delta > 0$ tal que si $0< | x-c| <\delta$, entonces

(6.1) $$\| (f(x) - f(c) / x-c) - y \| < \varepsilon \ .$$

Podemos escribir (6.1) en la forma

(6.2) $$\lim_{x \to c} \| f(x) - f(c) / x-c \| = y$$

El límite y , si existe es único, y se llama la **derivada de** f **en el punto** c.
La derivada de f en el punto c, se denota por f ´(c).

6.1 **Teorema** Si el límite en (6.2) existe , es único.

6.2 **Teorema** La suma f+g de dos funciones diferenciables en un punto c, es diferenciable en el punto c. Además, la derivada de la suma es igual a la suma de sus derivadas.
(6.3) $$(f+ g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$
El producto af de un real a y una función diferenciable f, es diferenciable. Además , la derivada de af es igual a af ´.
(6.4) $$(af)'(c) = a f'(c).$$

La diferenciación en $\mathbf{R^n}$, se reduce al caso real.

6.3 **Teorema** La función $f = (f_1 , f_2 , ... f_n) : [a,b] \to \mathbf{R^n}$, es diferenciable en el punto c de [a,b] si y sólo si, cada una de las componentes f_k, de f es diferenciable en el punto c.Además

(6.5) $$f'(c) = (f_1'(c), f_2'(c), ... f_n'(c)).$$

La imagen de una función vectorial $f : [a,b] \to \mathbf{R^n}$, es una curva en $\mathbf{R^n}$.
La derivada de la función **f** es **el vector velocidad de la curva.**
La norma de la velocidad de la curva es la **rapidez** de la curva.
(6.6) $$|| f'(x) ||$$
La integral de la rapidez, es la **longitud** de la curva.

(6.7) $$l (f) = \int f'(x) dx.$$ fig # 1.1

6.1 Ejemplo Calcular la velocidad, la rapidez y la longitud de la curva

$$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) : [0, 2\ \ ] \to \mathbf{R^2}.$$

Solución El vector velocidad es

$$f'(t) = (.\operatorname{sen} t, \cos t),$$

La rapidez de la curva es

$$|| f'(t)|| = \operatorname{sen} t + \cos t = 1.$$

La longitud de la curva , es

$$l (f) = \int dt = 2\pi.$$

VI.- Integral de Riemann- Stieltjes

1.-Definición de la Integral de Riemann- Stieltjes

En este capítulo vamos a considerar funciones reales f: $[a,b] \to \mathbf{R}$, definidas y acotadas en un intervalo cerrado [a,b].El espacio lineal normado formado por la s funciones acotadas, lo denotaremos por B([a,b])
Una **partición** P del intervalo [a,b], es un conjunto finito de puntos $P = \{x_0 , x_1, \ldots x_n,\}$ tales que

(1.1) $$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n = b.$$

Vamos a designar la clase de las particiones del intervalo [a,b], por P[a,b].
Una partición P es **más fina** que (o es un **refinamiento** de) una partición Q de [a,b]. si cada punto de Q, es un punto de P. Escribimos $P \supset Q$.

La **longitud** del subintervalo $[x_{i-1} ,x_i]$, es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, i = 1,2,..n.

Sea h: $[a,b] \to \mathbf{R}$, una función monótona creciente, y denotemos por

(1.2) $$\Delta h_i = h(x_i) – h(x_{i-1}), i = 1,2,..n.$$

La **norma** de una partición es $\max_i \Delta h_i$

La **suma** de **Riemann- Stieltjes**, de la función f con respecto a la función creciente h, correspondiente a la partición P de [a,b], es

(1.3) $$S(P,f,h) = \Sigma_i f(t_i)\Delta h_i$$

donde los puntos t_i son puntos arbitrarios en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1,2,…n.

1.1 **Lema** La suma de R-S de una combinación lineal af + bg de dos funciones f,g , es igual a la combinación lineal de las sumas de R-S de f, g .

(1.4) $$S(P, af + bg, h) = aS(P,f,h) +b S(P, g,h).a,b \in \mathbf{R}.$$

Demostración $S(P,f+g , h) = \Sigma \{f(t_i) + g(t_i)\}\Delta h_i. = \Sigma f(t_i)\Delta h_i + \Sigma g(t_i) \Delta h_i$
$= S(P,f,h) + S (P,g,h)$.
De manera análoga se demuestra que S(P, af, h) = a S(P,f,h), a $\in$ **R qed**

Definición Una función acotada **f** es **integrable con respecto** a la **función creciente** h, sobre el intervalo [a,b], si existe un número A, que tiene la siguiente propiedad : dado $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε de [a,b], tal que si P es más fina que P_ε, entonces

(1.5) $$|S(P, f,h) - A| < \varepsilon.$$

Vamos a designar por R[a,b](h) = R(h) la clase de las **funciones h-integrables**, sobre el intervalo [a,b], es decir , las funciones integrables con respecto a h.
Si el real A existe, es único, y se llama la **integral** de **Riemann-Stieljes** de f con respecto a h. La integral de f con respecto a h**,** sobre [a,b], se designa con
(1.6) $$\int fdh.$$

Propiedades de la **Integral**

1.2 Teorema La integral de f con respecto a h, si existe, es única.

Demostración Sean A,B dos integrales de f con respecto a h, es decir, dado $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε de [a,b] tal que si P es más fina que P_ε, entonces

$$|S(P,f,h) - A| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |S(P,f,h) - B| < \varepsilon$$

luego

$$|A-B| \leq |A- S(P,f,h)| + |S(P,f,h) - B| < 2\varepsilon .$$

Lo cual implica que A=B.

qed

1.3 Teorema Una combinación lineal af+ bg de funciones h- integrables , es h- integrable. Además, la integral de la combinación lineal, es igual a la combinación lineal de las integrales.
(1.7) $$f,g\ \varepsilon\ R(h) \Rightarrow \quad af+bg\ \ R(h).$$
Además
(1.8) $$\int(af+ bg)dh= a\int fdh + b \int gdh,\ a,b \in \mathbf{R}$$
Demostración f,g ε R(h), por hipótesis, es decir, existen dos números A,B,tales que dado $\varepsilon> 0$ existe una partición P_ε de [a,b], tal que si P es más fina que P_ε , entonces

$$| S(P,f,g) - A | < \varepsilon \ \text{y} \ |S(P,g,h) - B | < \varepsilon,$$

luego

$$|S(P, f+g , h) - (A+B)| \leq | S(P,f,h) - A | + | S(P, g,h) - B| < 2\varepsilon .$$

qed

Este teorema nos dice que la clase R(h) formada por las funciones h-integrables, es un subespacio del espacio lineal normado B[a,b] formado por las funciones acotadas ,con la norma uniforme

(1.9) $$||f|| = \sup\{|f(x)| : a \le x \le b\}.$$

La integral preserva el orden

1.4 Teorema Sea f ε R(h) una función no negativa y h- integrable. Entonces la integral de f es no negativa.

(1.10) $$f \ge 0 \;\Rightarrow\; \int fdh \ge 0$$

Demostración La suma de R-S de f con respecto a h es

(1.11) $$S(P,f,h) = \Sigma f(t_i)\Delta h_i \ge 0.$$

fε R(h) por hipótesis, es decir , existe un real A, tal que dado ε>0 existe una partición P_ε de [a,b], tal que si $P \supset P_\varepsilon$. entonces $|S(Pf,h) - A| < \varepsilon$. Lo cual implica que

$$S(P,f,h) - \varepsilon < A < S(P,f,h) + \varepsilon \; .$$

Tomando a S(P,f,h) mayor ε que se concluye que A≥ 0.

qed

1.5 Corolario Sean f, g dos funciones h- integrables, y supongamos que f ≤g. Entonces

(1.12) $$\int fdh \le \int gdh.$$

Demostración f ≤ g**,** por hipótesis , luego, g-f ≥ 0.
Por el teorema 1.4

$$0 \le \int (g-f)\, dh = \int gdh - \int fdh,$$

lo cual implica (1.12).

qed

Es natural suponer que si h es diferenciable , podemos escribir dh = h ´(x) dx, y concluiríamos que

$$\int fdh = \int f(x)\, h'(x)dx.$$

¿Bajo que condiciones es esto cierto?

1.6 Teorema (**Reducción** a la **Integral** de **Riemann**) Sea f :[a,b] → **R**,una función h-integrable y supongamos que h tiene primeras derivadas continuas. Entonces, la función g(x)=f(x)h´(x) es integrable. Además

(1.13) $\int fdh = \int f(x)\, h'(x)\, dx.$

Demostración La suma de Riemann de la función $g(x) = f(x)\, h'(x)$,es

$$S(P, g) = \Sigma\, f(t_i)\, g(t_i) \Delta x_i.$$

La suma de R-S de la función f con respecto a h, sobre I = [a,b], es

$$S(P, f,h) = \Sigma\, f(t_i) \Delta h_i\, .$$

La función h satisface las condiciones del teorema del valor medio en cada subintervalo de I, luego, existe $v_i\, \varepsilon\, (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,..n$, tal que

$$\Delta h_i = h(x_i) - h(x_{i-1}) = h'(v_i) \Delta x_i\, ,$$

de donde

$$S(P,f,h) - S(P,f h') = \Sigma\; f(t_i)\, [h'(v_i) - h'(t_i)]\, \Delta x_i.$$

La función f es acotada , es decir , existe un $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$.
La función $h'(x)$ es continua en el intervalo compacto I, luego, es uniformemente continua, es decir , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, que depende sólo de ε, tal que si

$$|x-y| < \delta \text{ entonces } |h'(x) - h'(y)| < \varepsilon\, .$$

Tomemos una partición P de I, cuya norma es menor que δ , entonces dado que

$$|v_i - t_i| < \delta \text{ , tenemos que } |h'(v_i) - h'(t_i)| < \varepsilon\, .$$

Estas desigualdades nos permiten concluir que

$$|S(P,f,h) - S(P, fh')| < M[\, h(b) - h(a)]\varepsilon\, .$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned} |S(P, fh') - A| &\leq |S(P,fh',) - S(P, f,h)| + |S(P,f,h) - A|\, , \\ &\leq M[h(b) - h(a)]\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

donde A es la integral de f con respecto a h.
Esto nos dice que fh´ es integrable y que su integral es la integral A de f con respecto a h.

qed

2.- Integrales Superior e Inferior de una Función

En esta sección vamos a definir las integrales superior e inferior de una función acotada $f\, \varepsilon\, B[a,b]$.Vamos a demostrar que una función f es h-integrable si y sólo si la integral inferior y la integral superior de f son iguales.Su valor común es la integral de f con respecto a h.

Puesto que la función f es acotada , podemos definir las siguientes cantidades

(2.1) $$M_i = \sup \{ f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \ i = 1,2,3,\ldots n$$
$$m_i = \inf \{ f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i \},\ i= 1,2,...n.$$

La **suma superior** de f con respecto a h, relativa a la partición P de [a,b], es

(2.2) $$U(P,f\,h) = \Sigma M_i \,\Delta h_i.$$

De manera análoga definimos la **suma inferior** de f,

(2.3) $$L(P,f,h) = \Sigma\, m_i \,\Delta h_i\ .$$

Las **integrales superior** e **inferior** de una función f, son

(2.4) $$U(f,g) = \inf \{U(P,f,h),\ P \,\varepsilon\, P[a,b] \}$$
$$L(f,g) = \sup\{ L(P;f,h),\ P\varepsilon\, P[a,b] \}$$

donde el supremum (y el infimum) se toma sobre la familia P[a,b] de las particiones de [a,b].
Nuestro siguiente paso será demostrar que toda función continua es integrable.
A medida que se refina una partición la sumas inferiores crecen y las superiores decrecen.

2.1 **Teorema** Sea Q un refinamiento de la partición P. Entonces

(2.5) $$L(Q,f,g) \geq L(P, f,g),$$
$$U(Q,f,g) \leq U(P,f,g).$$

Demostración Sea Q la partición que se obtiene introduciendo un punto t en el subintervalo $[x_{i-1} , x_i]$ de la partición $P = \{ x_0, x_1 , \ldots x_n \}$, y sean

$$r = \inf\{ f(x) ,\ x_{i-1} \leq x \leq t\} \quad s = \inf\{ f(x) : t \leq x \leq x_i.\}.$$

$$\begin{aligned} L(Q,f,h) - L(P,f,h) &= r\, [h(t) - h (x_{i-1}) + s\, [h(x_i) - h(t)] \\ &\quad - m\, [h(x_i) - h(x_{i-1})] \\ &= (r- m)[g(t) - g(x_{i-1})] + (s - m)[g(x_i) - g (t)] \geq 0. \end{aligned}$$

Si Q contiene k puntos más que P, el proceso anterior ese repite k veces.

qed

2.2 Teorema La integral inferior de una función es menor o igual que la integral superior.

(2.6) $$L(f,h)\leq U(f,g).$$

Demostración Sea $S = P\cup Q$ el refinamiento común de P,Q, entonces

$$L(P,f,h) \leq L(S,f,h) \leq U(S,f,g) \leq U(Q,f,g),$$

luego,

$$L(f,h) \leq L(P,f,h) \leq U(Q,f,h,) \leq U(f,h).$$

qed

2.3 Lema Si una función f es h- integrable , entonces vale la siguiente condición: Dado $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε tal que si P e más fina que P_ε vale que

(2.7) $$U(P,f,h) - L(P,f,h) < \varepsilon .$$

Demostración Supongamos que f es una función h-integrable , es decir , existe un número A, tal que dado $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε del intervalo [a,b], tal que si P es un refinamiento de P_ε, entonces

$$\left| \Sigma f(s_i)\Delta h_i - A \right| < \varepsilon \quad , \left| \Sigma f(t_i)\Delta h_i - A \right| < \varepsilon,$$

donde s_i , t_i ε $[x_{i-1}, x_i]$.De aquí concluimos que

$$\left| \Sigma f(s_i)\Delta h_i - \Sigma f(t_i)\Delta h_i \right| \leq \left| \Sigma f(s_i)\Delta h_i - A \right| + \left| A - \Sigma f(t_i)\Delta h_i \right| < 2\varepsilon$$

Ahora ,

$$U(P,f,h) - L(P,f,h) = \Sigma (M_i - m_i)\Delta h_i .$$

Pero

$$M_i - m_i = \sup \{f(x) - f(y) : x,y \ \varepsilon \ [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Por la propiedad del supremum, dado $\varepsilon>0$ existe s_i , t_i ε $[x_{i-1}, x_i]$, tales que

$$f(s_i) - f(t_i) + \varepsilon > M_i - m_i ,$$

Entonces

$$U(P,f,h) - L(P,f,h) = \sum (M_i - m_i)\Delta h_i < \Sigma (f(t_i) - f(s_i))\Delta h_i + \varepsilon(h(b) - h(a))$$
$$< 2\varepsilon + \varepsilon(h(b) - h(a)).$$

qed

La condición : Dado $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε tal que si P es más fina que P_ε implica que $U(P,f,h) - L(P,f,h) < \varepsilon$, se llama **condición de Riemann.**

2.4 Teorema La condición de Riemann es equivalente a la igualdad de las integrales superior e inferior.

(2.8) $U(f,h) = L(f,h) \Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon>0$ existe P_ε ε $P[a,b]$, tal que si $P \supset P_\varepsilon$, entonces

$$U(P,f,h) - L(P,f,h) < \varepsilon$$

Demostración Supongamos que la condición de Riemann es cierta, es decir que:

dado $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε de [a,b], tal que si $P \supset P_\varepsilon$ entonces

$$U(P,f,h) - L(P,f,h) < \varepsilon ,$$

por hipótesis.Es decir
$$U(P,f,h) < L(P,f,h)+\varepsilon,$$
de donde
$$U(f,h) \le U(P,f,h) < L(P,f,h) +\varepsilon \le L(f,h) + \varepsilon \ .$$
Entonces
$$U(f,h) – L(f,h) <\varepsilon ,$$
lo cual implica que
$$U(f,h) \le L(f,h),$$
pero, por (2.6)
$$U(f,h) \ge L(f,h)$$

Supongamos ahora que las integrales inferior y superior de f,con respecto a h, son iguales, y sea $\varepsilon > 0$.Por las propiedades del supremum y del infimum existen dos particiones P,Q tales que
$$U(f,h) +\varepsilon > U(P,f,h) > U(R,f,h) \ , \ L(f,h) < L(Q,f,h) + \varepsilon < L(R,f,g) + \varepsilon$$
donde $R = P\cup Q$,lo cual implica que
$$U(R,f,h) – L(R, f,h) < 2\varepsilon ,$$
qed

2.5 Teorema (Criterio de Integrabilidad de Riemann) Una función acotada es h- integrable si y sôlo si vale la condicion de Riemann (2.7).

(2.8) $f \varepsilon R(h) \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon>0$ existe $P_\varepsilon \ \varepsilon \ P[a,b]$, tal que si $P\supset P_\varepsilon$ entonces
$$U(Pf,h) –L(P,f,h) < \varepsilon$$

3.- Operaciones con Funciones Integrables

En esta sección demostraremos que el producto de dos funciones integrables es integrable y que el módulo de una función integrable es integrable.

3.1Teorema El valor absoluto de una función integrable, es integrable

(3.1) $f \varepsilon R(h) \ \Rightarrow \ |f| \ \varepsilon \ R(h).$

Demostración Definamos los máximos y mínimosde la función $|f|$, en los subintervalos $[x_{i-1},x_i]$.
$$M_i'=\sup \{ |f(x)| : x\varepsilon [x_{i-1}, x_i]\},\ m_i'= \inf \{| f(x)| : x\varepsilon [x_{i-1}, x_i] \}.$$
Entonces
$$\begin{aligned} M_i'- m_i' &= \sup \{ |f(x)| – |f(y)| : x,y \ \varepsilon \ [x_{i-1},x_i]\}, \\ &\le \sup. \{ f(x)- f(y): x,y \ \varepsilon \ [x_{i-1}, x_i] \} \\ &\le M_i- m_i \end{aligned}$$

Pero f es h- integrable, por hipótesis, luego, vale la condición de Riemann (2.7) de donde

$$\begin{aligned} U(P,|f|,h) - L(P,|f|,h) &= \Sigma\,(M_i' - m_i')\Delta h_i \\ &\leq \Sigma\,(M_i - m_i)\Delta h_i \\ &= U(P,f,h) - L(P,f,h) < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual implica que $|f|$,es h- integrable.

qed

3.2 Teorema El cuadrado de una función integrable, es integrable.

(3.2) $$f\ \varepsilon\ R(h) \Rightarrow f^2\ \varepsilon\ R(h).$$

Demostración Sea $M_i' = \sup\{f^2(x) : x\varepsilon\,[x_{i-1},x_i]\}$,

$m_i' = \inf\{f^2(x) : x\varepsilon\,[x_{i-1},x_i]\}$

entonces

$$M_i' - m_i' = \sup\{f^2(x) - f^2(y) : x,y\ \varepsilon\ [x_{i-1},x_i]\}.$$

La función f es una función acotada, es decir , existe un real K tal que

$$|f(x)| < K.$$

En consecuencia

$$f^2(x) - f^2(y) = [f(x) + f(y)][f(x) - f(y)] < 2K\,[f(x) - f(y)].$$

Luego,

$$M_i' - m_i' \leq 2K \sup\{f(x) - f(y) : x,y\ \varepsilon\ [x_{i-1},x_i]\} = 2K\,\{M_i - m_i\}.$$

La función f es h –integrable, luego vale la condición de Riemann (2.7):dado $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε ,tal que si P es más fina que P_ε, entonces

$$U(P,f,h) - L(P,f,h) < \varepsilon\ .$$

Lo cual implica que

$$U(P,f^2,h) - L(P,f^2,h) < 2K[U(P,f,h) - L(P,f,h)] < 2K\varepsilon\ .$$

qed

3.3 Teorema El producto de dos funciones integrables es integrable.

(3.3) $$f,g\ \varepsilon\ R(h) \Rightarrow fg\ \varepsilon\ R(h).$$

Demostración f,g ε R(h), luego, por el teorema 1.2

$$f+g\ ,\ f-g\ \varepsilon\ R(h).$$

Por el teorema 3.2

$$(f+g)^2\ ,\ (f-g)^2\ \varepsilon\ R(h),$$

de donde

$$fg = \tfrac{1}{4}\,[(f+g)^2 - (f-g)^2]\ \varepsilon\ R(h).$$

qed

VII.- Sucesiones de Funciones. Convergencia Uniforme

En este capítulo definiremos la convergencia puntual de una sucesión de funciones. Desearíamos que el límite de una sucesión de funciones continuas (diferenciables, integrables), fuera una función continua, (diferenciable, integrable). Debido a que la convergencia puntual no es lo suficientemente fuerte como para preservar la continuidad (diferenciablilidad, integrabilidad), es preciso definir la convergencia uniforme, que como veremos preserva la continuidad.

1.- Sucesiones de Funciones en Espacios Lineales Normados

En este capítulo vamos a considerar dos espacios lineales normados, X, Y , y la familia (X,Y) formada por las funciones $f : X \rightarrow Y$, con dominio X y codominio Y.
La mayor parte de los conceptos aquí presentados, tienen sentido en un espacio métrico y la mayor parte de la proposiciones son ciertas en espacios métricos.
Una **sucesión de funciones**, es una función $f : \mathbf{N} \rightarrow (X, Y)$, cuyo dominio es el conjunto de números naturales **N**, y cuyo codominio es la familia de funciones (X,Y), cuyo dominio es X y cuyo contradominio es Y.
Vamos a denotar la sucesión de funciones $f : \mathbf{N} \rightarrow (X,Y)$, por $\{f_n\}$.
Las funciones $f(n) = f_n$, n= 1,2,3...son los **términos** de la sucesión $\{f_n\}$.

La **suma** de dos sucesiones $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ es la sucesión $\{f_n+g_n\}$.

(1.1) $\{f_n\} + \{g_n\} = \{f_n + g_n\}$.

El **producto** de un real c y una sucesión de funciones $\{f_n\}$, es la sucesión $\{cf_n\}$.

(1.2) $c\{f_n\} = \{cf_n\}$.

Nos interesan en particular, las sucesiones convergentes.

2.-Convergencia Puntual

Una sucesión de funciones $\{f_n, n = 1,2,3,\ldots\}$ **converge en el punto x**, si la sucesión $\{f_n(x)\}$ en Y, converge a algún punto y en Y.

Es decir si para cada entero positivo $\epsilon > 0$ existe un natural $N = N(x,\epsilon)$, que depende del punto x, y de ϵ, tal que si $n > N$ entonces

(2.3) $\|f_n(x) - y\| < \epsilon$.

lo cual significa que

(2.4) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = y$

Una sucesión $\{f_n\}$ **converge (puntualmente), en el conjunto A**, si converge en cada punto de A.
En este caso podemos definir la función $f : A \to Y$. como

(2.5) $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Esta función f es **el límite** de la sucesión $\{f_n\}$.

Denotaremos por CS(X,Y) la clase de todas las sucesiones convergentes de funciones $f_n : A \to Y$ definidas en el conjunto A.

Una sucesión $\{f_n\}$ es **convergente ,** si converge , en cada punto de X.
En este caso podemos definir la función $f: X \to Y$, por la ecuación

(2.6) $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x)$

2.1.- **Teorema** El límite de una sucesión convergente de funciones es único.

Por el teorema 1.1 del capítulo III

2.2 Teorema Toda combinación lineal de sucesiones convergentes, es convergente.Es decir la clase CS(X,Y) es un espacio lineal sobre los reales.

3.-**Sucesiones Acotadas**

Una sucesión de funciones $\{f_n\}$, es **(puntualmente) acotada**, si para cada x en X , la sucesión $\{f_n(x)\}$ es acotada. Es decir, existe un real positivo $M = M(x)>0$, que depende de x, tal que

(3.1) $\|f_n(x)\| \leq M$.

Denotaremos por BS(A, Y) la clase de sucesiones acotadas de funciones $f_n : A \to Y$.

3.1 Teorema Una sucesión $\{f_n\}$ convergente de funciones, es acotada.

(3.2) $CS(A,Y) \subset BS(A,Y)$.

Demostración Por el teorema 1.1. del capítulo III.

3.2 **Teorema** Toda combinación lineal a $\{f_n\}$ +b $\{g_n\}$ de sucesiones acotadas, es acotada.Es decir, la clase BS(A,Y) formada por la sucesiones acotadas de funciones es un espacio lineal sobre los reales.

4.-Sucesiones de Cauchy

Una sucesión de funciones $\{f_n\}$, **es de Cauchy, en el punto x**, si la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy.
Es decir,si dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N = N(x, \varepsilon)$, que depende de x y de $\varepsilon > 0$, tal que si $m > N$ y $n > N$
entonces

(4.1) $$\| f_m(x) - f_n(x) \| < \varepsilon \ .$$

Una sucesión de funciones $\{f_n\}$, **es de Cauchy, en el conjunto A,** si es de Cauchy, en cada punto x de A.
Una sucesión es **de Cauchy,** si es de Cauchy, en X.

4.1 Teorema. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Por el teorema 5.1 del capítulo III.

Subsucesiones

Sea $n_1 < n_2 < n_3 <\ldots$ una sucesión creciente de números naturales y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones. Entonces, la sucesión

(4.2) $$\{f_{nk}\} = f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \ldots$$

es una **subsucesión de** $\{f_n\}$.

4.2 **Teorema** En un espacio lineal normado X, una subsucesión de una sucesión convergente de funciones , es convergente.

Por el teorema 1.6 del cap III.

4.3 **Teorema** Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de Cauchy con una subsucesión convergente es convergente.

$f_n \to f \qquad \Rightarrow \qquad f_{nk} \to f$

$\{f_{nk}\} \subset \{f_n\}$

Por el teorema 5.5 del cap III.

4.1 **Ejemplo** La sucesión de funciones reales $f_n(x) = x/n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, converge a cero.

4.2-**Ejemplo**.La sucesión de funciones $f_n(x) = x^n : [0,1] \to \mathbf{R}$, converge a la función

(4.3) $$f(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x < 1$$
$$= 1 \text{ si } x = 1.$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que el límite de una sucesión de funciones continuas (diferenciables) puede ser discontinua (no diferenciable), a pesar de que el dominio es compacto.

4.3 **Ejemplo** La sucesión de funciones reales de variable real

(4.4) $$f_n(x) = (x + nx)/n = x/n + x,$$

converge a x.

5.-Convergencia Uniforme.

Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones ,**converge uniformemente, hacia una función f, en el subconjunto A de X,** si para todo $\epsilon > 0$ existe un natural N, que depende sólo de ϵ ,y que no depende de $x \in A$, tal que si $n > N$ entonces

(5.1) $$\| f_n(x) - f(x) \| < \epsilon,$$

para todo x en A.

Denotaremos por UCS(A,Y) la clase de las sucesiones uniformemente convergentes de funciones, definidas en A con valores en Y.

La sucesión $\{f_n\}$ es **uniformemente convergente,** si es uniformemente convergente en X.

Es claro que toda sucesión uniformemente convergente de funciones, es convergente

5.1 Teorema. El límite de una sucesión uniformemente convergente, de funciones, es único.

Demostración Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f y a g, entonces

$$\{f_n\} \text{ converge a f y a g,}$$

luego

$f(x) = g(x)$, por el teorema 1.1 del cap III.

qed

.

5.2 Teorema Toda combinación lineal de sucesiones uniformemente convergentes, es una sucesión uniformemente convergente.Es decir, la clase UCS(A,Y) forma un espacio lineal normado sobre los reales..

Demostración Supongamos que las sucesiones $\{ f_n \}$, $\{g_n \}$ convergen uniformemente a las funciones f, y g , respectivamente,
es decir , dado $\epsilon > 0$ existe un natural $N = N(\epsilon)$, que depende de ϵ , pero que no depende de x, tal que si $n \geq N$, entonces

(5.2) $$\| f_n(x) - f(x)\| < \epsilon, \| g_n(x) - g(x)\| < \epsilon \text{, para todo x.}$$

De aquí concluimos que para $n \geq N$

(5.3) $$\begin{aligned} \| (f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)\| &= \| f_n(x) - f(x) + g_n(x) - g(x)\| \\ &\leq \| f_n(x) - f(x)\| + \| g_n(x) - g(x)\| \\ &< 2\epsilon \text{ ,} \end{aligned}$$

lo cual demuestra que la suma de dos sucesiones de funciones, uniformemente convergentes es uniformemente convergente.
De manera análoga se demuestra que $c \{ f_n\}$ converge uniformemente a cf_n.

qed

5.1 Ejemplo La sucesión $f_n(x) = x^n/n : [0,1] \to \mathbf{R}$, converge uniformemente a cero.

En efecto, $\sup \{ x^n/n : 0 \leq x \leq 1 \} = 1 / n \to 0$.

5.2 Ejemplo La sucesión de funciones reales de variable real,

$$f_n(x) = x^n : [0,1] \to \mathbf{R},$$

no es uniformemente convergente.
En efecto, $\sup \{ x^n : 0 \leq x \leq 1\} = 1$. no converge a cero.

5.3 **Ejemplo** La sucesiónde funciones reales $f(x) = x/n! : [0,1] \to \mathbf{R}$, converge uniformemente a cero**.**
En efecto

$$\mathbf{\sup \{ x/n! : 0 \leq x \leq 1\} = 0}$$

6.-Sucesiones Uniformemente Acotadas de Funciones

Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones, $f_n : X \to Y$, $n = 1,2,3,\ldots$ es **uniformemente acotada** si existe un real positivo M >0,**independiente** de x , tal que

(6.1) $$\| f_n(x) \| < M,$$

para todo x en X y todo natural n.

Es decir,

(6.2) $$N(\{f_n\}) = \sup \{\| f_n(x) \| : x \in X, n \in \mathbf{N}\} < \mathbf{M} < \infty .$$

Vamos a designar por UBS (X, Y) la clase de las sucesiones de funciones, $\{f_n\}$ uniformemente acotadas.

6.1 Teorema La clase UBS(X,Y) de las sucesiones de funciones uniformemente acotadas, es un espacio lineal sobre los reales.

La función

$$N : UBS(X,Y) \to \mathbf{R},$$

definida en **(6.2)**, es una norma sobre UBS(X, Y).

Demostración Sean $\{ f_n \}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones de funciones uniformemente acotadas, es decir existe un real positivo M>0 tal que

$$\| f_n(x)\| < M \quad \| g_n(x)\| < M, \text{ para todo x, y todo n,}$$

luego

$$\| af_n(x) + b\, g_n(x) \| < |a| \| f_n(x)\| + |b| \| g_n(x) \| < (|a| + |b|)\, M.$$

lo cual demuestra que toda combinación lineal de sucesiones uniformemente acotadas, es una sucesión uniformemente acotadas.

La demostración de que la función N definida en (5.2) es una norma se deja como ejercicio.**qed**

7.-Sucesiones de Cauchy(en la topología uniforme).

Una sucesión de funciones $\{ f_n \}$ es una **sucesión de Cauchy, en la topología uniforme,** si dado $\epsilon > 0$ existe un número natural $N= N(\epsilon)$, independiente de x, tal que si n > N, m > N, entonces

(7.1) $$\| f_m(x) - f_n(x) \| < \epsilon,$$

para todo x en X.

Denotaremos por UCA(A,Y) la clase formada por las sucesiones de Cauchy en la topología uniforme.

7.1 Teorema Una sucesión de funciones $f_n : \mathbf{N} \to (X, Y)$, uniformemente convergente , es uniformemente de Cauchy.

$$UC(X,Y) \subset UCA(X,Y).$$

Demostración Sea $\{f_n\}$, una sucesion de funciones uniformemente convergente, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe un natural $N = N(\varepsilon)$, que depende de ε, pero que no depende de x, tal que si $n>N$, entonces

$$\| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon.$$

Elijamos dos índices $m > N$, $n > N$, entonces

$$\| f_n(x) - f_m(x) \| \leq \| f_n(x) - f(x) \| + \| f(x) - f_m(x) \| < 2\varepsilon .$$

qed

7.2 Teorema Sea Y un espacio lineal normado completo. Una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$, que es uniformemente de Cauchy, es uniformemente convergente.

Demostración.La sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy, es decir , dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ que depende de $\varepsilon > 0$, pero que no depende de $x \in X$, tal que si $j > N$, $k > N$,
entonces

$$\| f_k(x) - f_j(x) \| < \varepsilon .$$

La sucesión $\{f_n\}$ es (puntualmente) de Cauchy, y Y es (puntualmente) completo, por hipótesis, en consecuencia la sucesión $\{f_n\}$ converge (puntualmente) hacia una función $f : X \to Y$.

Dado que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en la topología uniforme, existe un índice N, que no depende de x, tal que si $j > N$, $k > N$,
entonces

$$\| f_k(x) - f_j(x) \| < \varepsilon$$

para todo x.

Hagamos tender k a infinito, entonces $j > N$, implica que

$$\| f_j(x) - f(x) \| \leq \varepsilon.$$

Dado que esta desigualdad es cierta para todo x, hemos encontrado un índice N, tal que si $j \geq N$, vale que $\| f_j(x) - f(x) \| < \varepsilon$.

qed

8.- Funciones Acotadas. La Norma Uniforme

Una función $f : X \to Y$, es **acotada** si existe un real positivo $M > 0$, tal que

(8.1) $$\| f(x) \| < M, \text{ para todo } x \in X.$$

8.1 Teorema La clase B(X, Y) formada por las funciones acotadas, de un espacio lineal normado X, en un espacio lineal normado Y, forman un espacio lineal. La función $N : B(X, Y) \to \mathbf{R}$, definida por

(8.2) $$N(f) = \sup \{ \| f(x) \| : x \in X \}$$

es una norma sobre B(X,Y).N(f) es la **norma uniforme** de f.

Demostración Sean f, g dos funciones acotadas, es decir, existe un real positivo M > 0. tal que $\|f(x)\| < M$, $\|g(x)\| < M$, para todo x en X.
Luego

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| < 2M,$$

Lo cual nos demuestra que la suma de dos funciones acotadas, es acotada.
De manera análoga se demuestra que cf es acotada.
Ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(f+g) &= \sup\|f(x) + g(x)\| \\ &\leq \sup\|f(x)\| + \sup\|g(x)\| \\ &= N(f) + N(g), \end{aligned}$$

Lo cual nos demuestra que la norma de la suma es menor o igual que la suma de las normas.Las restantes propiedades de la norma , se demuestran en forma análoga.

qed

8.2 Teorema Una sucesión de funciones acotadas $\{f_n\}$, converge uniformemente a la función acotada f, si y sólo si , $N(f_n - f)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Demostración Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$, que depende de ϵ , pero que no depende de x, tal que si $n > N$, entonces

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon \text{ para todo x en X.}$$

Es decir

$$\sup_x \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon, \text{ para } n > N.$$

Esto nos dice que $N(f_n - f) < \epsilon$, para $n > N$, es decir $N(f_n - f)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. El recíproco es inmediato.

qed

8.3 Teorema (Preservación de la Continuidad) El límite de una sucesión de funciones continuas$\{f_n\}$,que converge uniformemente , es una función continua.

Demostración La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, por hipótesis, es decir,
dado $\varepsilon > 0$ existe un natural $N = N(\varepsilon)$,que depende de ε, pero que no depende de x tal que si $n \geq N$,

entonces

$$||f_n(x) - f(x)|| < \varepsilon.\ .$$

En particular,

$$|| f_N(x) - f(x)|| < \varepsilon \text{ , para toda x en X.}$$

Sea p un punto de X, queremos demostrar que f es continua en p.

$$|| f(x) - f(p)|| \leq || f(x) - f_N (x)|| + ||f_N(x) - f_N(p) || + ||f_N(p) - f(p) ||$$
$$\leq \varepsilon + ||f_N(x) - f_N(p)|| + \varepsilon.$$

Dado que f_N es continua, existe un número $\delta>0$ tal que si

$$|| x - p || < \delta$$

entonces

$$|| f_N(x) - f_N(p)|| < \varepsilon.$$

De aquí concluimos que

$$||f(x) - f(p)|| < 3\varepsilon$$

qed

9.- El Espacio Lineal Normado, C(X) de las Funciones Reales Definidas sobre un Espacio Métrico Compacto

En esta sección consideramos un espacio métrico compacto X, y el espacio lineal normado C(X) (sección 3 cap IV) formado por las funciones reales continuas definidas en X.

9.1 Teorema El espacio C(X) formado por las funciones reales continuas sobre el espacio métrico compacto X, forman un espacio de Banach, es decir, un espacio lineal normado completo.

Demostración Por el teorema 4.1del cap IV, C(X) es un espacio lineal , y la función

$$N: C(X) \to \mathbf{R},$$

definida por

(9.1) $$N(f) = \sup \{| f(x)| : x \varepsilon X\}$$

es una norma sobre C(X).

Por el teorema 7.2 , el espacio C(X) es un espacio de Banach.

qed

Dado que **C(X) es** un espacio lineal normado**,** tiene sentido hablar de bolas abiertas**,** conjuntos abiertos**,** cerrados**,** compactos etc**.**

La bola abierta con centro en la función f ε C(X) y radio r > 0 es el conjunto

(9.2) $$B(f\,;\,r) = \{\, g\ \varepsilon\ C(X) \colon N(f-g) < r \},$$

formado por las funciones g cuya distancia a f, es menor que r.
Un conjunto A de funciones de C(X), es **abierto** si cada función g en A, tiene una bola abierta contenida en A.

9.2 Teorema Los conjuntos abiertos en C(X) tienen las siguientes propiedades
i) El vacío y el total C(X) son abiertos.
ii)La unión de una familia arbitraria de conjuntos abiertos , es un conjunto abierto.
iii) La intersección de dos abiertos, es un conjunto abierto.

por el teorema 3.2 del cap III.

Una familia F de subconjuntos de un conjunto S, que satisfacen las condiciones del teorema 9.2, es una **topología para el conjunto S.**
La pareja (S,F), es un **espacio topológico.**
Es decir, la familia F de conjuntos abiertos de C(X), es una **topología** para C(X), y la pareja (C(X); F) es un **espacio topológico**.
Un conjunto C de funciones continuas en C(X),es **cerrado** si su complemento es abierto.

9.3 Teorema Los conjuntos cerrados en C(X), tienen las siguientes propiedades:
i) El vacío y el total C(X), son conjuntos cerrados.
ii) La unión de dos cerrados, es cerrada.
iii) La intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados, es cerrada.

por el teorema 4.1 del cap III.

10.-Compacidad. Teorema de Arzela- Ascoli

Sea X un espacio métrico compacto y C(X) el espacio lineal normado formado por las funciones reales continuas definidas en X.(Véase sección 3 cap IV).
En la sección 6 del capítulo II, definimos el concepto de conjunto compacto.
Un conjunto es compacto, si toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita.De igual manera definimos la compacidad en C(X).
Un conjunto K de funciones en C(X), es **compacto** si toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

En el espacio euclidiano $\mathbf{R}^n$, sabemos por el teorema de Bolzano – Weierstrass, (teorema 5.4 cap II), que toda sucesión acotada en $\mathbf{R}^n$, tiene una subsucesión convergente. Desgraciadamente, el teorema de B-W, no vale en C(X).

10.1-Ejemplo. **El Espacio C[0, 2 π].** La sucesión de funciones continuas,

.(10.1) $$f_n(x) = \text{sen } nx : [0,2\pi] \to \mathbf{R}, \ n = 1,2,\ldots$$

es una sucesión de funciones continuas uniformemente acotada por uno. Supongamos que tiene una subsucesión convergente

$$\{\text{sen } n_k x : k \in \mathbf{N} \}.$$

Entonces

$$\text{Lím } [\text{sen } n_{k+1} x - \text{sen } n_k x] = 0.$$

En consecuencia

$$\text{Lím } [\text{sen } n_{k+1}x - \text{sen } n_k x]^2 =0.$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue,

$$\text{Lím}\int [\text{ sen } n_{k+1}x - \text{sen } n_k x]^2 \, dx =0.$$

Pero por cálculo directo

$$\text{Lím } \int [\text{sen } n_{k+1}x - \text{sen } n_k x]^2 \, dx = 2\pi .$$

Esta contradicción demuestra que la sucesión acotada {sen nx } no contiene ninguna subsucesión convergente.

Equicontinuidad

Para caracterizar la compacidad de un conjunto K, de funciones continuas en C(X), necesitamos el concepto de equicontinuidad.
Un conjunto K en C(X) es **uniformemente equicontinuo**, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si la distancia $d(x,y) < \delta$ es menor que δ , entonces

(10.2) $$|f(x)- f(y)| < \varepsilon \text{ , para toda f en K.}$$

10.1 **Proposición** Las funciones que forman un conjunto uniformemebnte equicontinuo**,** son uniformemente continuas

10.2 **Proposición** Todo subconjunto de un conjunto uniformemente equicontinuo, es uniformente equicontinuo.

Ejemplos

10.3 Un subconjunto finito de C(X), es equicontinuo.
Sea E = { f_k , k= 1,2,..n] un subconjunto finito de C(X).Entonces dado $\varepsilon >0$ existe $\delta_k >0$ tal que si $d(x,y) < \delta_k$,entonces

$$| f_k(x) - f_k(y) | < \varepsilon .$$

Sea $\delta = \text{mín}\{ \delta_k , k= 1,2,..n \}$, entonces $d(x,y) <$ implica que

$$| f_k(x) - f_k(y)| < , \ k=1,2...n.$$

10.4 Teorema Toda sucesión uniformemente convergente en C(X), es uniformemente equicontinua.

Demostración Sea $\{f_n\}$ una sucesión uniformemente convergente en C(X), que converge a f.

Es decir,dado $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que si $n \geq N$ entonces

$$|| f_n - f|| = N(f_n - f) < \varepsilon .$$

La sucesión $\{ f_n : n \leq N \}$ es finita y por lo tanto equicontinua.

Es decir,

dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $d(x , y) < \delta$ entonces

$$| f_i(x)- f_i(y) | < \varepsilon , \quad i \leq N.$$

En consecuencia para $n > N$, vale que

$$|| f_n - f_N|| \leq || f_n - f|| + || f - f_N || < 2\varepsilon,$$

lo cual nos demuestra que la sucesión $\{ f_n \}$, es uniformemente equicontinua.

qed

10.5 Teorema Un conjunto compacto K en C(X) es cerrado, acotado y equicontinuo.

Demostración En la sección 6 del capítulo II, se demostró que todo conjunto compacto, en un espacio lineal normado es cerrado y acotado. Nos falta demostrar que K es equicontinuo.

K es compacto en C(X), por hipótesis, luego, K es un conjunto totalmente acotado, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito $\{B(f_i ; \varepsilon), i= 1,2,3,..n \}$, de bolas abiertas con centro en f_i , y radio $\varepsilon > 0$ que cubren a K.Las funciones f_i , son uniformemente continuas, porque X es compacto, (teorema 5.1, cap IV) luego, dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta_i > 0$, tales que si $d(x,y) < \delta_i$ entonces

$$| f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \quad .$$

Sea $\delta = \text{mín}\, \delta_i$, entonces $d(x,y) < \delta$ implica que $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$, i = 1,2,…n. Sea f una función en K, entonces f pertenece a alguna de las bolas $B(f_i ; \varepsilon)$, digamos $f \varepsilon B(f_k ; \varepsilon)$. Entonces,

$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_{i,}(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$,
lo cual demuestra que K es equicontinuo.

qed

El siguiente teorema puede considerarse como una generalización del teorema de Bolzano- Weierstrass.

10.6 Teorema (Arzela- Ascoli) Una sucesión puntualmente acotada y equicontinua de funciones en C(X), es uniformemente acotada y tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Demostración La sucesión $\{f_n\}$ es equicontinua, por hipótesis, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe un real positivo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces

(10.3) $$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,\ n = 1,2,3, \ldots .$$

La familia $\{B(x;\delta) : x \in X\}$ de bolas abiertas con centro en un punto x de X, y de radio δ, forma una cubierta abierta de X, pero X es compacto, por hipótesis, luego, existe un conjunto finito $\{x_k \in X, k = 1,2,3,..n$, tal que la familia $\{B(x_k;\delta, k = 1,2, n\}$,es subcubierta abierta de X.

$$X = \cup B(x_k;\delta, k = 1,2, n\}.$$

Dado que X es compacto, X tiene un subconjunto denso numerable E. Por la densidad de E en X, podemos tomar los puntos x_k, en E, y por ser E numerable la sucesión $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{f_{ni}\}$ que converge en cada punto x de E.Queremos demostrar que la subsucesión

$$g_i = f_{ni},\ i = 1,2,\ldots$$

es uniformemente convergente.

Puesto que la subsucesión $\{g_i(x)\}$ es convergente en E, concluimos que las sucesiones $\{g_i(x_k)\}$ convergen, luego, las sucesiones $\{g_i(x_k)\}$ son de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N_k, $k = 1,2,..n$, tal que si $i > N_k$, $j > N_k$ entonces

$$|g_i(x_k) - g_j(x_k)| < \varepsilon.$$

Tomando $N = \max N_{k,}$ vemos que $i > N$, $j > N$, implica que

(10.4) $$|g_i(x_k) - g_j(x_k)| < \varepsilon, \text{ para todo } k = 1,2,\ldots n.$$

Sea x un punto de X, entonces x pertenece a la bola $B(x_k;\delta)$, para alguna k, lo cual implica que $d(x, x_k) < \varepsilon$, y en consecuencia

(10.5) $$|g_i(x) - g_i(x_k)| < \varepsilon.$$

Las ecuaciones (10.1) y (10.2) implican que para $i > N$, $j > N$, obtenemos

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_i(x_k)| + |g_i(x_k) - g_j(x_k)| + |g_j(x_k) - g_j(x)| < 3\varepsilon.$$

Puesto que **R es** completo**,** la sucesión $\{g_i\}$ converge uniformemente.

qed

VIII.- Diferenciación de Funciones Reales de Varias Variables

En este capítulo definimos la diferencial de una función real de varias variables.
En la sección 1, introducimos el concepto de derivada parcial y presentamos algunas de sus propiedades.
En la sección 2 presentamos el concepto de derivada direccional, el cual generaliza el concepto de derivada parcial. La derivada direccional de una función en dirección de los vectores de la base estandar de $\mathbf{R}^n$, son las derivadas parciales.
En la sección 3,definimos la diferencial de una función real de varias variables.
En este capítulo A será un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^m$**, y f: A**$\rightarrow$ **R** una función real de varias variables.

1.- **Derivadas Parciales**

Sea **A** un subconjunto abierto del espacio euclidiano $\mathbf{R}^m$ de dimensión m, y f: A$\rightarrow$ **R** una función real definida en A.

Definición La i-**ésima derivada parcial** de la función $f = f(x_1 ,x_2, ..x_m)$ en el punto p de A es

$$(1.1) \qquad D_i f(p) = \lim_{t \to 0} f(p+t e_i) f(p) / t , \quad i = 1,2,..m.$$

donde $e_i = (0,0,..1,0,0..0)^T$ es el vector columna con un uno en la i- ésima fila y ceros en las demás filas, y la T significa traspuesto .

Ejemplos

1.- Cuando m =1 tenemos una función real de una variable real, que se estudió en el capítulo anterior.
2.- Las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = 2x + 3y + 7$$

son

$$D_1 f(x,y) = 2, \ D_2 F(x,y) = 3.$$

3.- Las derivadas parciales de la función cuadrática

$$f(x,y) = x^2 +y^2$$

son

$$D_1\, f(x,y,z) = 2x, \qquad D_2\, f(x,y,z).= 2y.$$

4.- Las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = x\mathrm{sen}y + y \cos x$$

son

$$D_1\, f(x,y) = \mathrm{sen}\, y - y\, \mathrm{sen}\, x. \quad D_2\, f(x,y) = x\cos y + \cos y.$$

Definición El **gradiente** de la función $f = f(x_1,x_2 ,..x_m) : A \to \mathbf{R}$**,** en el punto p de A es

(1.2) $$\nabla f(p) = \sum D_i\, f(\, p\,)\, e_i \;.$$

cuyas componentes son las derivadas parciales de f en el punto p.

En los cursos de Cálculo Avanzado se demuestra que

1.1 **Proposición** Sean f, g : $A\to \mathbf{R}$ dos funciones cuyas derivadas parciales existen en un punto p de A. Entonces las derivadas parciales de la suma f+g y producto fg existen. Además

(1.3) $$D_i\, (f + g)(p) = D_i\, f(p\,) + D_i\, g(p),$$

y

(1.4) $$D_i\, fg\, (p) = f(p)D_i\, g\, (p) + g(p)D_i\, f(p).$$ (Regla de Leibniz), $i = 1,2, ...m$.

2.- **Derivadas Direccionales**

Sea A un subconjunto abierto del espacio lineal normado X, y $f :A\to$ **R**, una función real.
La **derivada direccional** de la función $f :A\to$ **R**, en el punto p, en dirección del vector v ε **X,** es

(2.1) $$\mathbf{D_v}\, f(p) = \lim_{t \to 0} \, [f(p+tv) - f(p)] / t.$$

Es fácil ver que cuando $X = \mathbf{R}^m$ la derivada direccional de f en el punto p, dirección del vector básico e_i , es la i-ésima derivada parcial de f, en el punto p.

(2.2) $D_{e_i} f(p) = D_i f(p)$, $i = 1,2, ..m.$

3.- Diferencial de una Función Real de Varias Variables

Sea A un subconjunto abierto del espacio lineal normado X y $f: A \to \mathbf{R}$ una función real.

Definición Una función $f: A \to \mathbf{R}$ es **diferenciable** en el punto $p \in A$ si existe una funcional lineal continua $T : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$, que cumple la siguiente condición:
Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|h\| < \delta$ entonces

(3.1) $$|f(p+h) - f(p) - T(h)| < \varepsilon \|h\| .$$

La funcional lineal T cuando existe es única y recibe el nombre de **diferencial de f en p ,** y se denota por df(p), o bien df_p.

Una función f es **diferenciable en un conjunto** A si es diferenciable en cada punto de A.Denotaremos por D(A) la clase de las funciones diferenciables en A, y por D_p (A) la clase de las funciones diferenciables en el punto p.
Nuestro primer paso será demostrar que la diferencial es única.

3.1 **Teorema** Una función diferenciable , tiene una y sólo una diferencial

Demostración Sean S,T dos diferenciales de la función diferenciable f en el punto p.Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|h\| < \delta$ tenemos que

$$|f(p+h) - f(p) - S(h)| < \varepsilon \|h\| \quad \text{y} \quad |f(p+h) - f(p) - T(h)| < \varepsilon \|h\|$$

luego
$$\begin{aligned} |S(h) - T(h)| &= |f(p+h) - f(p) - T(h) - \{ f(p+h) - f(p) - S(h)\}| \\ &\leq |f(p+h) - f(p) - T(h)| + |f(p+h) - f(p) - S(h)| \\ &< 2\varepsilon \|h\| . \end{aligned}$$
De donde
$$|S(h) - T(h)| / \|h\| < \varepsilon .$$

lo cual implica que

$$||S(h) - T(h)|| = 0.$$

luego

$$S = T \qquad \textbf{qed}$$

Las derivadas direccionales de una función diferenciable existen

3.2 **Teorema** Sea f ε D(A) una función diferenciable en el subconjunto abierto A del espacio lineal normado X. Entonces las derivadas direccionales de f existen. Además

$$(3.2) \qquad D_v f(p) = df(p)(v).$$

Demostración La función f es diferenciable , por hipótesis, es decir existe una funcional lineal continua df(p) : X $\to$ **R** que cumple la siguiente condición:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < || h || < \delta$, entonces

$$| f(p+h) - f(p) - df(p)| < \varepsilon || h|| \quad .$$

Sea v ε X un vector de X y tomemos h = tv tal que

$$|| h || = | t| || v|| < \delta \quad , t \varepsilon \mathbf{R} ,$$

entonces, por (3,.1)

$$| f(p + tv) - f(p) - t \, df (p) (v) | < | t| || v|| ,$$

de donde

$$| f(p+tv) - f(p) / t - df(p) (v)| < \varepsilon ,$$

lo cual implica que

$$D_v f(p) = df(p)(v).$$

qed

3.3.**Teorema** Sea f ε D(A) una función diferenciable en un subconjunto abierto A de $\mathbf{R}^m$ Entonces todas las derivadas parciales de f existen.Además la diferencial de f en el punto p de A, en dirección del vector v , es igual al producto escalar del gradiente de f, y el vector v.

$$(3.3) \qquad df(p)(v) = \nabla f(p) . v.$$

Demostración Sea $v = \sum v_i e_i$ .Por la linealidad de df(p),

$$df(p) (v) = \sum v_i \, df (p) (e_i)$$

$$= \sum v_i D_i f(p).$$

$$= \nabla f(p) . v.$$

qed

Nuestro siguiente paso será demostrar que la suma y el producto de funciones diferenciables es diferenciable.

3.4 **Teorema** La suma f+g y el producto fg de dos funciones diferenciables f,g D(A) son diferenciables..

(3.3) $$f,g \,\varepsilon\, D(A) \Rightarrow f + g \,\varepsilon\, D(A)\,,\ fg \,\varepsilon\, D(A).$$

Además

(3.4) $$d(f+g)(p) = df(p) + dg(p)\,.$$

(3.5) $$dfg(p) = f(p)\, dg(p) + g(p)\, df(p),$$ (Regla de Leibniz).

Demostración f,g ε D(A) por hipótesis, lo cual implica que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|| h|| < \delta$ entonces

$$| f(p+h) - f(p) - d f(p)| < \varepsilon || h|| , \quad | g(p+h) - g(p) - dg(p)| < \varepsilon || h||$$

.luego

$$| f(p+h) + g(p+h) - [f(p) + g(p)]- [df(p)(h) + dg(p)(h)]|$$

$$\leq | f(p+h) - f(p) - df(p)| + | g(p+h) - g(p) - dg(p)(h)| < 2 \varepsilon ||h|| ,$$

lo cual implica (3.3) y (3.4).
La ecuación (3.5) se demuestra en forma análoga.

qed

Para funciones reales de varias variables vale que toda función diferenciable es continua**.**

3.5 Teorema Una función diferenciable es continua. Es decir, el espacio lineal D(A) formado por las funciones diferenciables, es un subespacio del espacio lineal C(A) formado por las funciones continuas

(3. 6) $$D(A) \subset C(A)$$

Demostración Sea f ε D(A) una función diferenciable en el conjunto abierto A.Es decir, existe una funcional lineal df(p) que cumple la condición (3.1), es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|| h|| < \delta$ entonces

$$| f(p+h) - f(p) - df(p)| < \varepsilon || h || .$$

Luego

$$|f(p+h) - f(p)| \leq |f(p+h) - f(p) - df(p)(h)| + |df(p)(h)|$$

$$< \varepsilon \|h\| + \|df(p)\| \|h\|$$

$$< M \|h\|,$$

donde

$$M = \|df(p)\| + \varepsilon$$

lo cual implica que f es continua.

qed

4.- Teorema del Valor Medio

Sea A un subconjunto abierto del espacio euclidiano $\mathbf{R}^m$ de dimensión m y $f : A \to \mathbf{R}$ una función real .
El **segmento de recta** que une los puntos p,q del conjunto A , es el conjunto

(4.1) $$L(p,q) = \{ p + t(q-p) : t \in [0,1] \}.$$

La función

(4.2) $$r(t) = p + t(q-p) : [0,1] \to \mathbf{A},$$ **Fig # 4.1**

es una parametrización del segmento L(p,q)

Un conunto A es **convexo** ,si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.

Fig #4.2

4.1 **Teorema** (**Teorema del Valor Medio para Funciones Reales de Varias Variables**) Sean A un subconjunto abierto y convexo de $\mathbf{R}^m$**.** Sean **p, q** dos puntos de A **y f:**$A \to$ **R** una función real de varias variables diferenciable en A. Entonces existe un punto c en el segmento que une a los puntos p,q tal que

(4.3) $$f(q) - f(p) = f'(c)(q-p).$$

Demostración Sea $r(t) = p + t(q-p) : [0,1] \to \mathbf{A}$**,** una parametrización del segmento L(p,q) que une los puntos p,q.
La compuesta

$$g(t) = f(r(t))\ [0,1] \to \mathbf{R},$$

Fig #4.3

de las funciones r(t) y $f : A \to \mathbf{R}$, es una función real diferenciable, por la regla de la cadena (Teorema 2.1 Cap VI).
La derivada de la función g, es

$$g'(t) = df(r(t))(q-p).$$

Por el teorema del valor medio para funciones reales de una variable real (teorema 4.2 cap VI),vale que

$$g(1) - g(0) = g'(t_0), \; t_0 \in (0,1),$$

es decir

$$f(q) - f(p) = f'(c)(q-p), \; c = r(t_0).$$

qed

Una función cuyas derivadas parciales existen no es, necesariamente diferenciable.Para que la función sea diferenciable es condición suficiente pero no necesaria que las parciales existan y sean continuas.

4.2 **Teorema** Sea $f : A \to \mathbf{R}$ una función real definida en el subconjunto abierto A de $\mathbf{R}^m$, y sean p,q dos puntos de A Supongamos que las derivadas parciales de f existen y son continuas. Entonces la función f es diferenciable . Además

(4.4) $$df(p)(v) = \sum D_i f(p) e_i = \nabla f(p). v, \; v \in \mathbf{R}^m.$$

Demostración Por el teorema del valor medio, existe un punto z en el segmento que une los puntos p, q , tal que

$$f(p+h) - f(p) = \nabla f(z). h. \quad \text{donde } h = q-p,$$

Fig # 4.4

luego

$$|f(p+h) - f(p) - \nabla f(p) . h| = |\nabla f(z). h - \nabla f(p) .h|$$

$$\leq \| \nabla f(z) - f(p) \| \| h \| \text{ , por Schwarz}$$

Pero la función ∇f es una función continua ,por hipótesis , es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\| h \| < \delta$ entonces $|\nabla f(z) - \nabla f(p)| < \varepsilon$
lo cual implica que

$$|f(p+h) - f(p) - \nabla f(p) . h| < \varepsilon \| h, \|$$

y finalmente

$$df(p)(v) = \nabla f(p) . v.$$

qed

5.- Diferenciales de Orden Superior

En esta sección**,** enunciamos **y** demostramos el teorema de Taylor**.** Con este objetivo en mente, definimos el concepto de diferenciales de orden superior al primero.

Sea A un subconjunto abierto del espacio lineal normado X y $f : A \rightarrow \mathbf{R}$**,** una función real .

La **segunda derivada parcial** de la función $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) : A \rightarrow \mathbf{R}$,con respecto a las variables x_i , x_j es la i- ésima derivada parcial de la j- ésima derivada parcial de f .

(5.1) $D_{ij} f(p) = D_i D_j f(p)$. $i,j = 1,2,...m$.

Ejemplos

5.1 Calcular las segundas derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 2 x^2 y .$$

Solución Las derivads parcials de primer orden son

$$D_1 f(x,y) = 3 x^2 + 4xy, \quad D_2 f(x,y) = -3y^2 + 2x.$$

Las derivadas parciales de segundo orden son

$$D_{11} f(x,y) = 6x + 4y, \quad D_{12} f(x,y) = 4x \quad D_{22} f(x,y) = -6y.$$

Definición La **segunda diferencial** o **diferencial** de **segundo orden** de la función f, en un punto p de A, es la función bilineal (Véase Cap I , sección 3)

$$d^2 f(p) : \mathbf{R}^m x \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R},$$

que satisface la condición

(5.1) $d^2 f(p)(e_i, e_j) = D_{ij} f(p)$ $i,j = 1,2,3,...m$.

5.1 **Proposición** La segunda diferencial de una función cuyas segundas derivadas parciales existen, admite la expresión

(5.2) $d^2 f(p)(v,w) = \sum_{ij} D_{ij} (p) v_i w_j$,

donde

$$v = \sum v_i e_i \qquad w = \sum w_i e_i ,$$
son vectores en X.

Demostración $d^2 f(p)(v,w) = \sum_{ij} d^2 f(p)(e_i, e_j) v_i w_j$

$$= \sum_{ij} D_{ij}(p) v_i w_j , \quad \text{por } (5,1)$$

qed

Ejemplos

1.- Calcular la segunda diferencial de la función

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^3 + 7 .$$

en el punto (1.2) y en dirección de los vectores $v = (2,3), w = (1,4)$.

Solución Las derivadas parciales de primer orden de f , son

$$D_1 f(x,y) = 4x \qquad D_2 f(x,y) = 9y,$$

las derivadas parciales de segundo orden de la función f, son

$$D_{11} f(x,y) = 4, \quad D_{12} f(x,y) = 0 \quad D_{22} f(x,y) = 9.$$

Luego la segunda diferencial de f, en el punto p = (1,2),es

$$d^2 f(x,y) = 4x2\ x1 + 9\ x3x4 = 108.$$

La **tercera diferencial** de una función real $f : A \to \mathbf{R}$, en el punto p de A, es la funcional trilineal $d f(p) : XxXxX \to \mathbf{R}$, que satisface la condición

(5.5) $$d^3 f(p)(e_i, e_j, e_k) = D_{ijk} f(p), \qquad i,j,k = 1,2,...m.$$

De manera análoga se definen las diferenciales de orden superior al tercero.

5.3 **Teorema de Taylor**. Sea $f:A \to \mathbf{R}$ una función real definida en un conjunto abierto y conexo A de $\mathbf{R^m}$, cuyas diferenciales $d^k f$ de orden k = 1,2,..n,existen y son continuas en A.Sean a,b dos puntos de A. Entonces existe un punto c en el segmento que une los puntos a,b , tal que

(5.6) $f(a+h) = f(a) + df(a)(h)\ \ ½!\ d^2 f(a)(h,h) +.. 1/n!\ d^n f(c)(h,h..h).$

Demostración Sea $r(t) = a+th,: [0,1] \to A$, (donde h = b-a), una parametrización del segmento que une los puntos a,b, y sea

$$g(t) = f(r(t)) = f(a+ th),$$

la compuesta de las dos funciones r(t) y f.

Por la regla de la cadena

$$g'(t) = df(a+th)(h),$$
$$g''(t) = d^2 f(a+th)(h,h)$$
$$g'''(t) = d^3 f(a+th)(h,h,h),$$

$$g^{(n)}(t) = d^n f(a+th)(h,h,...h).$$

Desarrollando en serie de Taylor la función $g(t_0)$, (teorema 4.2 cap IV), resulta

$$g(1) = g(0) + g'(0) + ½!\, g''(0) + ..\ 1/n!\, g(t_0).$$

Tomando $c = a + t\,h$ se demuestra el teorema.

qed

6.- **Extremos de una Función**

En esta sección enunciamos y demostramos el teorema del extremo interior en forma análoga a como lo hicimos en la sección 3 del capítulo VI .
Sea A un subconjunto del espacio lineal normado X y $f : A \to \mathbf{R}$ una función real definida en **A.**
Una función f tiene un **máximo local** en el punto c de A, si existe una bola abierta B(c, r) con centro en c y radio positivo r,tal que

(6.1) $f(c) \geq f(c+h)$ para $\|h\| < r$.

De manera análoga se define un **mínimo local**.
Un máximo local es **estricto**, si $f(c) > f(c+h)$, para $\|h\| < r$.
Los valores máximo y mínimo se llaman **valores extremos** de la función.

6.1 **Teorema del Extremo Interior**) Sea A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^m$ y $f : A \to \mathbf{R}$ una función real.Supongamos que la función f tiene un extremo (máximo ó mínimo) local en un punto interior p de A.Si sus derivadas parciales existen en p, entonces son iguales a cero.

Demostración Sea $c = (c_1, c_2, ...c_m)$ y definamos la función

(6.2) $g(x) = f(x, c_2, c_3, \; c_m)$.

Por hipótesis , la función f tiene un extremo local en el punto interior c, es decir, existe una bola B(c, r) con centro en c y radio positivo r, tal que

(6.3) $$f(c) \geq f(c+h) \text{ para } ||h|| < r.$$

Entonces la función g tiene un máximo local en c , en efecto

$$g(c) = f(c) \geq f(x, c_2, c_3, ..c_m) = g(x).$$

Por el teorema 3.2 del capítulo VI ,

$$g'(c) = D_1 f(c) = 0.$$

En forma análoga demostramos que $D_i f(c) = 0$, $i = 1,2, ...m$.

qed

Un punto p es un **punto crítico** de una función f si las derivadas parciales (si existen) de f, en el punto p son iguales a cero.

6.2 **Corolario** Sea A un subconjunto de $\mathbf{R}^m$ y $f : A \to \mathbf{R}$ una función cuyas derivadas direccionales en cualquier dirección v existen. Si f tiene un extremo local en un punto interior p de A,entonces , las derivadas direccionales $D_v f(p) = 0$ son iguales a cero.

Demostración $D_v f(p) = \sum D_i f(p) e_i = 0$, por el teorema anterior

qed

6.3 **Corolario** Sea A un subconjunto de $\mathbf{R}^m$ y $f: A \to \mathbf{R}$ una función diferenciable en el punto interior p de A.Supongamos que f tiene un extremo local en p.Entonces la diferencial de f en el punto p es igual a cero.

Demostración $df(p)(v) = D_v f(p) = 0$

qed

Si el punto **p** donde la función **f** toma el extremo local no es un punto interior**,** entonces no necesariamente se anula la diferencial de f.

Ejemplos.

6.1.-La función $f(x) = x : [0,1] \to \mathbf{R}$, tiene un máximo local en x = 1, pero su derivada $f'(x) = 1$, no se anula en x= 1.

En un punto crítico de una función ,no necesariamente la función tiene un extremo local.

6.2.- El punto x = 0 es un punto crítico de la función $f(x) = x^3$, pero f no tiene un extremo en x = 0.

6.3.- Encontrar los puntos críticos de la funcion

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^3 + 7xy.$$

Solución Las derivadas parciales de la función f, son

D f(x,y) = 4x +7y , D f(x,y) = 9y + 7x.

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
El determinante del sistema es 28 – 63 = - 35 ,
Luego (0,0) es un punto crítico.

6.4.- Encontrar los puntos críticos de la función cúbica

$$f(x,y) = x^3 + y^3$$

Solución Las parciales de la función son

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 , \quad D_2 f(x,y) = 3y^2 .$$

El punto (0,0) es el único punto crítico de la función.

7.- **Criterio de la Segunda Derivada**

Sea A un subconjunto abierto del espacio euclidiano de dimensión m y $f : A \to \mathbf{R}$ una función real.

7.1.- **Teorema** Sea A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^m$ y $f: A \to \mathbf{R}$ una función con segundas derivadas parciales continuas, en el subconjunto abierto A de $\mathbf{R}^m$.Supongamos que la función f tiene un mínimo local en el punto c de A. Entonces la segunda diferencial de f, en el punto c, es definidamente positiva .Es decir

(7.1) $\quad d^2 f(c)(v,v) > 0$, para toda $v \neq 0$.

Demostración Sea u un vector unitario, es decir, un vector con norma uno.Por hipótesis la función f tiene un mínimo local en el punto interior c de A, es decir existe una bola abierta B(c, r) con centro en c y radio positivo r >0 tal que

(7.2) $\quad f(c) \leq f(c + t u)$ para $\| tu\| = |t| < r$.

Dado que A es abierto podemos elegir t de modo que c + t u pertenezca a A.Por el corolario 6.3

(7.3) $$df(c) = 0.$$

Por el teorema de Taylor

(7.4) $$f(c+ tu) = f(c) + df(c) (tu) + d^2 f(c) (tu,tu)/2,$$

$$= f(c) + d^2 f(c) (tu,tu)/2,$$

de donde

(7.5) $$d^2 f(c) (tu, tu) = 2 \{ f(c+tu) – f(c) \} \geq 0$$

qed

7.2 Teorema (Criterio de la Segunda Derivada) Sea A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^m$ y f: $A\to$ **R** una función con segundas derivadas parciales continuas en A. Sea c un punto crítico de f. Entonces

i) si la segunda diferencial de f en c es definidamente positiva , entonces f tiene un mínimo local en c.

ii) si la segunda diferencial de f en el punto c, es definidamente negativa, entonces la función f tiene un máximo local en c.

iii) si la segunda diferencial de f en el punto c es indefinida, entonces f no tiene un extremo local en c.

Demostración Por el teorema de Taylor,

(7.6) $$f(c+h)= f(c) + df(c)(h) + ½ d^2 f(c) (z, z)$$

donde z es un punto en el segmento que une a c y c+h.
El punto c es un punto crítico de f, por hipótesis, luego

(7.7) $$f(c+h) = f(c) + 1/2 d^2 f (c)(z,z).$$

Si $d^2 f (c)$ es definidamente positiva existe un real positivo $\varepsilon > 0$ tal que si la distancia

(7.8) $$|| d^2 f (c) – A|| < \varepsilon$$

entre la segunda diferencial y la función bilineal A es menor que ε,entonces A es definidamente positiva.

Pero por hipótesis $d^2 f (c)$ es continua en el punto c.Es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe un real positivo $\delta > 0$ tal que si $|| x-c|| < \delta$ entonces la distancia

(7.9) $$|| d^2 f(x) - d^2 f(c)|| < \varepsilon \ .$$

Dado que z está en el segmento que une a c y c+h, la distancia entre

(7.10) $$|| z - c || . < || h || < \delta ,$$

lo cual implica que $d^2 f(z)$ es definidamente positiva, en consecuencia por (7.7)

$$f(c+h) - f(c) > 0,$$

es decir, f tiene un mínimo local en c.

ii) la demostración es completamente análoga a la demostración de i).

iii) Si tuviera un máximo o un mínimo local en c, por el teorema 7.1 sería definida.

qed

IX.- Diferenciación de Funciones Vectoriales de Varias Variables

En este capítulo vamos a considerar dos espacios vectoriales normados X, Y y un subconjunto abierto U no vacío, de X.
En la primera sección de este capítulo, introduciremos el concepto de diferencial de una función $f : U \to Y$, estableceremos algunas de sus propiedades y presentaremos algunos ejemplos.
En la segunda sección presentaremos la definición de derivada direccional de una función f,en el punto $p \varepsilon X$, en dirección del vector v , la cual es una generalización de la derivada parcial.

En la tercera sección consideramos los casos particulares de funciones vectoriales de una variable, funciones vectoriales de varias variables y funciones reales de varias variables y establecemos para cada uno de estos casos, las relaciones que existen entre derivadas, gradiente y diferencial.

En la cuarta sección estudiamos la diferenciabilidad de la compuesta de dos funciones diferenciables y demostramos la regla de la cadena.

En la quinta y última sección demostramos un teorema del valor medio para funciones vectoriales de varias variables.

1.- **Diferenciabilidad**

En esta sección definimos el concepto de diferenciabilidad de una función $f : U \to Y$,en un punto p de U, donde U es un subconjunto abierto no vacío del espacio vectorial normado X .La diferenciabilidad de una función implica la existencia de una transformación lineal, llamada la diferencial de f en el punto p.
Cuando la diferencial de una función, existe en un punto p, entonces todas las derivadas direccionales existen.

Definición Una función $f: U \to Y$ es **diferenciable en un punto p** de U, si existe una transformación lineal continua $A \in L (X, Y)$,que satisface la siguiente condición: Dado un real positivo $\epsilon > 0$, existe otro real positivo $\delta > 0$ tal que si

$$0 < \| h \| < \delta,$$

entonces

$$\| f(p+h) - f(p) - A(h) \| < \epsilon \| h \| . \tag{1.1}$$

Vamos a demostrar que si A existe, es única. Cuando A existe, se le llama la **diferencial de f, en el punto p**, y se le designa por cualesquiera de los símbolos df_p, $df(p)$, Df_p, $f'(p)$, $Df(p)$.
Recordemos que la norma de una transformación lineal continua (Sección 3, cap IV) $A \varepsilon L(X,Y)$, es

(1.2) $$||A|| = \sup \{ ||Ax|| / ||x|| : x \neq 0 \} .$$

1.1 **Teorema** (**Unicidad de la Derivada**) Si la diferencial de una función existe, es única.

Demostración: Supongamos que existe otra diferencial B de f en el punto p. Es decir B satisface la condición (1.1).Luego

$$\|A(h) - B(h)\| = \|[f(p+h) - f(p) - B(h)] - [f(p+h) - f(p) - A(h)]\|$$

$$\leq \|f(p+h)-f(p) - B(h)\| + \| f(p+h) - f(p) - B(h)\|$$

$$< 2\epsilon \|h\|$$

Entonces $\|A-B\| = 0$, de donde A = B.

qed

Vamos a designar por D(U, Y), la clase de las funciones diferenciables, en cada punto del conjunto abierto U del espacio vectorial normado X, con valores en el espacio vectorial normado Y , y por D_p (U, Y) la clase de las funciones diferenciables en p.

Toda función diferenciable es contínua.

1.2 **Teorema** : Sea $f : U \to Y$, una función diferenciable en el punto p de U. Entonces, f es contínua en el punto p.

Demostración: f es diferenciable en p, por hipótesis, es decir, la condición (1.1), es válida.Luego,

$$\| f(p+h)-f(p) \| \leq \| f(p+h)-f(p)-df(p)(h)\| + \|df(p)(h) \|$$

$$<\epsilon\|h\| + \| df(p)(h).\|.$$

Pero

$$\| df(p)(h)\| \leq \|df(p)\| \| h\|$$

Luego,

$$\| f(p+h)-f(p)\| < \epsilon\| h\|+\|df(p)\| \| h\| =\| h \|(\epsilon + \| df(p)\|),$$

lo cual implica que la función f es continua.

qed

1.3 Teorema. Sean f, g ε $\mathbf{D_p}$ **(** U, Y) dos funciones diferenciables en el punto p de U.Entonces toda combinación lineal af + bg , a , b ε **R,** de las funciones f, g es diferenciable en p.Además

(1.3) $$d\,(af + bg\,)_p = a\, df_p + b\, dg_p$$

Demostración Las funciones f, g son diferenciables, por hipótesis,es decir dado ε >0 existe δ>0 tal que si $0 < || h|| <\delta$,
entonces

$$|| f(p+h\,) - f\,(\,p\,)\,.\, df(p)\,(h)|| < \varepsilon||h||,$$

$$||g(p+h\,) - g(p) - dg(p)\,(h)|| < \varepsilon|| h||,$$

de donde

$$||f(p+h\,) + g(p+h) - f(p) - g(p) - df(p)\,(h) - dg(p)\,(h)||$$

$$\leq|| f(p+h) - f(p) - df(p)\,(h)|| +|| g(p+h)-g(p) - dg(p)\,(h)||$$

$$< 2\,\varepsilon||h||,$$

lo cual demuestra que la suma de dos funciones diferenciables es diferenciable.De manera análoga se demuestra que cf es diferenciable.

qed

Ejemplos

1.1-En el capítulo V,estudiamos la diferenciabliidad de las funciones reales de vriable real, es decir , el caso en que X= **R, U =(a,b)** es un subconjunto de **R** y el codominio Y= **R.**

1.2- En el capítulo VIII estudiamos la diferenciabilidad de funciones reales de varias variables, es dcir, el caso en que U es un subconjunto abierto de **R,** y el codominio Y son los reales.

2. **Derivadas Direccionales**

En esta sección vamos a considerar dos espacios lineales normados X,Y, y un subconjunto abierto U de X. Las funciones $f: U \to Y$, tendrán como dominio el conjunto abierto U, y como codominio el espacio lineal normado Y.
Una generalización interesante de la derivada parcial de una función (véase sección 1 capítulo VIII) es la derivada direccional.En un espacio euclidiano las derivadas direccionales en dirección de los ejes coordenados son las derivadas parciales. Este concepto de derivada direccional, sin embargo, no es lo suficientemente fuerte como para garantizar la validez de algunos teoremas que nos interesan, ya que como veremos existen funciones discontinuas cuyas derivadas direccionales existen.

Definición La **derivada direccional** de una función vectorial $f: U \to Y$ en dirección del vector v en U, en el punto p, es el límite (cuando existe)

(2.1) $$Df_v(p) = \lim_{t \to 0} \{ [f(p + t v) - f(p)] / t \}.$$

Es fácil ver que la derivada direccional de f, en dirección de v,en el punto p, es igual a la derivada de la función $f(p + t v)$ en $t = 0$.

2.1- **Ejemplo**. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = x\, i + yj$, en el punto p(1,1) en dirección del vector $v=2i + 3j$.

Solución : $p + tv = (1+2t, 1+3t)$, luego $f(p + tv) = f(1+2t, 1+3t) = (1+2t)i + (1+3t)j$.

Entonces la derivada direccional es

$$D_v f(p) = \lim_{t\to 0}\{ (1+2t)i + (1+3t)j - (i+j) /t\} = \lim_{t\to 0} (2i + 3j) = 2i +3j.$$

La derivada direccional de una función vectorial, tiene las siguientes propiedades

2.1 **Teorema**: Las derivadas direccionales de una función diferenciable $f \in D_p(U, Y)$,en un punto p de U, existen en todas las direcciones, en el punto p. Además

(2.2) $$D_v f(p) = df(p)(v).$$

Demostración: La función f es diferenciable en el punto p, por hipótesis, es decir, la función satisface la condición (1.1)

$$\| f(p+h) - f(p) - df(p)(h) \| < \epsilon \| h \|,$$

tomemos

$$h = tv, \text{ con } \| h \| = |t| \|v\| < \delta .$$

Entonces $\| [f(p+tv) - f(p)]/t - df(p)(v) \| < \epsilon \| v \|$.Lo cual implica (2.2).

qed

2.2 **Teorema** La derivada direccional de la combinación lineal de dos funciones diferenciables es igual a la combinación lineal de sus derivadas direccionales.

(2.3) $$D_v (af + bg)(p) = a D_v f(p) + bD_v g(p).$$

Es consecuencia de los teoremas 1.2 y 2.1.

En esta sección presentamos algunos ejemplos que ilustran el concepto de diferencial para las funciones vectoriales de una variable,, para funciones vectoriales de varias variables .

3..-Diferencial en $\mathbf{R}^n$

Sea U un subconjunto abierto del espacio vectorial normado $\mathbf{R}^m$ (Ejemplo 1.3 Cap. I), U un subconjunto de $\mathbf{R}^m$ y $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$, una función vectorial .Sea $\{e_1, e_2, \ldots e_m,\}$ la base canónica de R^m.
El vector columna $\mathbf{e_i} = (0,0,..,1,0,0,..0)^T$, (T significa traspuesto de) tiene un uno en la i-ésima fila y ceros en las demás filas.

Entonces existen n funciones reales $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m): U \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1,2,.. n$, tales que

(3.1) $$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = \Sigma_i f_i(x_1, x_2, \ldots x_m).\mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3,...n.$$

Las funciones f_i, $i = 1,2,\ldots n$, son las **funciones coordenadas** de f.

A continuación definiremos el concepto de derivada parcial de una función de varias variables

Definición La **i –ésima derivada parcial,** $i = 1,2,..m$, de la función $f : U \to \mathbf{R}^n$, en el punto p, es

(3.2) $$D_i f(p) = \lim_{t \to 0} \{ [f(p+ t e_i) - f(p)] / t \} , i = 1,2,...m.$$

Es decir, la i-ésima derivada parcial de f, es igual a la derivada direccional de f , en dirección de e_i., $i =1,2, \dots m$.

La i-ésima derivada de la función f es el vector columna

(3.3) $$D_i f (p) = [D_i f_1(p), D_i f_2(p),....D_i f_n(p)]^T$$

La matríz jacobiana de la función $f : U\to \mathbf{R}^n$, es la matríz

$$J_f (p) = [D_1 f (p) D_2 f(p)\dots D_m f(p)] = [D_i f_j (p)].$$

3.1 Teorema La diferencial d f(p) (v) de la función diferenciable f , en el punto p, en dirección del vector v, es igual al producto de la matríz jacobiana de f

(3.4) $$df(p)(v) = J_f (p) v,$$

y el vector v.

Ejemplos

3.1- **Ejemplo** Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y,z)= 2x+3y+5z.$$

Solución : $D_1 f(x,y,z) = 2$, $D_2 f (x,y,z)= 3$, $Df_3(x,y,z)= 5$.

3.2- **Ejemplo** Calcular la derivada de la función vectorial de una variable

$$f(t) =i(\cos t) + j(\operatorname{sen} t),$$

donde $i = (1,0)$, $j =(0,1)$, son los vectores unitarios, que forman la base canónica de R^2.

Solución : $f'(t)= i(-\operatorname{sen} t) + j(\cos t)$.

Las derivadas parciales, como se ha visto en los cursos de Cálculo Avanzado tienen las siguientes propiedades

3.2 **Teorema** Sean f,g : $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ dos funciones vectoriales de varias variables , cuyas derivadas parciales existen. Entonces las derivadas parciales de la suma f+g existen y son iguales a las sumas de las derivadas parciales correspondientes

(3.5) $$D_i(f+g) = D_i f + D_i g \ , \ i = 1,2..m$$

Las derivadas parciales del producto interno de dos funciones vectoriales satisfacen la regla de Leibniz.

(3.6) $$D_i (f.g) = f. D_i g + g. D_i f .$$

Demostración Por el teorema 2.1, $D_i (f+ g)(p) = d(f + g) (p)(\mathbf{e_i})$

$$= \mathbf{d}f(p) (\mathbf{e_i}) + dg(p) (\mathbf{e_i}) = D_i f(p) + D_i g (p)$$

qed

3.3 **Ejemplo** : Hallar la derivada del producto interno de las funciones vectoriales

$$f(t)= i (t) + j(t^2) \rightarrow R^2 \qquad g(t) = i(t^2) + j (t^3) : [0, \pi/4].\rightarrow R^2$$

Solución Las derivadas de las funciones son

$$f'(t) = i +j (2t) , \quad g'(t) = i(2t) + j (3 t2) \quad ,$$

el producto escalar de f,g es

$$f(t).g(t) = t^3 + t^5$$

cuya derivada es

$$[f.g (t)]' = 3t^2 + 5t^4 .$$

3.3 **Teorema**: Sea f : U $\rightarrow \mathbf{R}^n$, una función diferenciable en el punto p. Entonces, las derivadas parciales de f en el punto p existen.
La i-ésima derivada parcial de f en el punto p, es igual a la diferencial de f valuada en el vector fundamental $e_i = (0,0,..1,0..0)$, i =1,2,…m.

(3.7) $$D_i f(p) =df_p (e_i) , \quad i = 1,2, ...m.$$

Además
(3.8) $df(p)(v) = \Sigma_i v_i D_i f(p)$, i = 1.2. m.

Demostración: Por (2.3), la diferencial de f en el punto p, en dirección del vector e_i, es igual a la derivada direccional de f, en el punto p, en dirección de e_i.

$$df(p)(e_i) = De_i f(p) = Di f(p),$$

por definición de derivada parcial.

Por la linealidad de df(p), tenemos para un vector $v = \Sigma_i v_i e_i$,que

$$df(p)(v) = \Sigma v_i df(p)(e_i) = \Sigma v_i D_i f(p).$$

qed

La i-ésima derivada parcial de la función vectorial $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$, es el vector

(3.9) $$Di f(p) = \Sigma_k D_i f_k (p) e_i .$$

Ejemplo Funciones Vectoriales

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de **funciones vectoriales**, es decir, funciones $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ **,** que toman valores en un espacio lineal normado $\mathbf{R}^n$, definidas en un intervalo cerrado [a,b].En particular relacionamos la derivada y la diferencial de una función vectorial **f**.

Definición.Una función vectorial $\mathbf{f : [a,b] \rightarrow R^m}$, es **diferenciable en el punto** t de [a,b], si el límite cuando h tiende a cero

(3.10) $$\mathbf{f'(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(t+h) - f(t)\} / h,$$

existe.
Si tal límite existe , recibe el nombre de **derivada de f en el punto t,** y se designa por **f´(t).**
La relación entre la derivada **f**´(t) y la diferencial de **df**(t)(v), en el punto t , en dirección de v ε [a,b], es
(3.11) $$d\mathbf{f}(t)(v) = \mathbf{f}'(t)v,$$
igual al producto de la derivada en el punto t y el escalar v.

3.4 Teorema Sea f una función vectorial diferenciable, en el punto t. Entonces su diferencial es

(3.12) $df_t(h) = f'(t)h$.

Demostración f es diferenciable en el punto t, por hipótesis, es decir, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|h|<\delta$.

entonces

$$\| f(t+h) - f(t)/h - f'(t)\| < \varepsilon,$$

de donde

$$\| f(t+h) - f(t) - hf'(t)\| < \varepsilon |h| ,$$

lo cual demuestra (3.3)

qed

El vector velocidad de la función vectorial **f**, es **f´(t).**

La norma de la derivada de la trayectoria $\|$ **f´(t)** $\|$**,** es la **rapidez de** la función vectorial **f.**

La imagen **C = f([a,b])** del intervalo [a,b], bajo **f**, es una **curva en $\mathbf{R}^n$, parametrizada por f.**

La aceleración de un punto que describe la curva C , es la derivada del vector velocidad, es decir, es la segunda derivada de **f(t).**

La **longitud de** la curva **C = f(**[a,b]**),** es la integral de la rapidez

(3.12) $$L(C) = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\| \, \mathbf{dt}.$$

Ejemplos

1.- Sea **r**(t) = (cost, sent): $[0,2\pi] \to$ $\mathbf{R}^2$**,** una circunferencia con centro en el orígen y radio 1.**E**l vector velocidad de la circunferencia es **r´(t) =(** -sent, cost).Su rapidez es $\|$ **r´(t)** $\|$ = 1.La longitud de la circunferencia es 2π .La aceleración de la circunferencia ,es (-cos t, -sen t).

2.-Sea **r(t)= (cos t, sen t , t)** : $[0, 2\pi] \to$ $\mathbf{R}^3$, una parametrización de la hélice circular H.El vector velocidad de la hélice es **r**´(t) = (-sen t, cos t, 1).La rapidez ,es $\|$ **r´(t)** $\|$ **= $2^{1/2}$, y** la longitud de la hélice H , es $2(2)^{1/2}\pi$ .La aceleración es (-cos t, -sen t , 0).

El vector de posición **r :[a,b]→ $\mathbf{R}^3$** , toma valores en **$\mathbf{R}^3$,** luego, existen tres funciones x(t), y (t), z(t), tales que **r(t) = i** x(t) + **j**y(t) + **k**z(t)**,** donde **i,j,k,** forman la base canónica de **$\mathbf{R}^3$.**Entonces , el vector velocidad ,es

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}x'(t) + \mathbf{j}y'(t) + \mathbf{k}\,z'(t).$$

La rapidez, es

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2\}^{1/2}.$$

3.5 Corolario Toda combinación lineal de dos funciones vectoriales diferenciables, es diferenciable .Además,

(3.13) $\qquad (af + bg)'(t) = af'(t) + bf'(t).$

4.-Composición de Funciones. Regla de la Cadena

En esta sección demostraremos que la compuesta de dos funciones diferenciables es diferenciable y que la diferencial de la compuesta es igual a la compuesta de sus diferenciales.Consideraremos dos espacios vectoria- les normados **X,Y**.

Sea f una función con dominio en un subconjunto abierto A de **X y codominio** Y**, y** g una función definida en un subconjunto B de la imagen $f(X)\subset$ **Y** de la función **f** con valores en el espacio lineal normado **Z** . La **compuesta** de la función f y la función g, es la función $g_o f : A\rightarrow Z$ cuyo dominio es A, que toma valores en el espacio **Z,** definida por

(4.2) $\qquad (gof)(p)= g(f(p)), \quad p$ en A.

4.1 **Ejemplo**. La compuesta de la función

$$f(x)=2x +3 \text{ y la función } g(y)= 3y +7.$$

es la función, $\qquad$ Fig # 4.1

$$gof(x)= g(f(x))= g(2x+3)= 3(2x+3) + 7$$
$$=6x+9+7=6x+13.$$

4.2 **Ejemplo** La compuesta de la función vectorial

$$r(t)= i(\cos t) + j(\text{sen } t) :[0,2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

y la función

$$F(x,y)=ix + jy :\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

es la función

$$F(r(t))= i(\cos t) + j (\text{sen } t).$$

4.3 Ejemplo La compuesta de la función $f(x,y) = (x+ y, x-y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$**, y** la función $g(u,v) = uv : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es la función

$$g(f(x,y)) = g(x+y, x+y) = (x+y)(x-y).$$

4.2 Teorema (Regla de la Cadena) Sean **X, Y, Z,** tres espacios lineales normados. Sea f: X→ Y, una función diferenciable en el punto p y g: Y→ **Z,** una función diferenciable en el punto q = f(p).Entonces la compuesta

$$g_o f :X \rightarrow \mathbf{Z}$$

es diferenciable en el punto p.

Además, la diferencial de la función compuesta $g \circ f$ es igual a la compuesta de la diferencial de f en el punto p y la diferencial de g en el punto q = f(p).

$$(4.3) \qquad d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

Demostración: La función f es diferenciable en el punto p , por hipótesis, es decir, existe una transformación lineal df_p de **X** en **Y**, que cumple la siguiente condición: Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si

$$0 < \| h \| < \delta ,$$

entonces

$$(4.4) \qquad \| f(p+h) - f(p) - df_p(h) \| < \epsilon \| h. \|$$

Tambien la función g es diferenciable en el punto q = f(p), es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < \| k \| < \delta$, entonces

$$(4.5) \qquad \| g(q+k) - g(q) - dg_q(k) \| < \epsilon \| k \| .$$

Sea

$$(4.6) \qquad r(h) = f(p+h) - f(p) - df(p)(h),$$

entonces por (4.4)

$$(4.7) \qquad \| r(h) \| < \epsilon \| h \|$$

y

$$(4.8) \qquad f(p+h) = f(p) + df_p(h) + r(h).$$

Análogamente, sea

$$(4.9) \qquad s(k) = g(q+k) - g(q) - dg_q(k),$$

en consecuencia

$$(4.10) \qquad g(q + k) = g(q) + dg_q(k) + s(k), \text{ y } \quad \| s(k) \| < \epsilon \| k \| .$$

De aquí que por (4.8)

$$(4.11) \qquad (gof)(p+h) = g(f(p+h)) = g(f(p) + df_p(h) + r(h)),$$

$$= g(f(p)) + dg_{f(c)}(df_p(h) + r(h)) + s(df_p(h) + r(h))$$

por (4.10)

$$= g(f(p)) + (dg_{f(c)} \circ (df_p(h) + dg_{f(c)}(r(h)) + s(df_p(h) + r(h)).$$

Pero por (4.7)

(4.12) $\| dg_{f(c)}(r(h)) \| \leq \|dg_{f(c)}\| \|r(h)\| < \varepsilon \|dg_{f(c)}\| . \|h\|$

lo cual implica que $g \circ f$ es diferenciable y que su diferencial es la compuesta de las diferenciales de f en p y de g en f(p).

qed

Ejemplos

4.1.-Calcular **la** derivada de la compuesta **de las** funciones

$$f(x) = 2x+3,\ g(y) = 3y +7$$

La compuesta de f y g es $g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3) + 7= 6x + 16$.
Su derivada es $(g \circ f)'(x)= 6$.
La derivada de f(x) es $f'(x)= 2$, y la derivada de g(y) es $g '(y) = 3$,
luego la compuesta de las derivadas es $g '(f(x))f '(x) = 3.2 =6$.

5.-Teoremas del Valor Medio

En esta sección queremos encontrar un teorema del valor medio, semejante al teorema del valor medio para funciones reales de una variable.(Teorema 4.2 Cap V)Este teorema afirma que para funciones reales $f: [a,b] \to \mathbf{R}$, continuas en un intervalo cerrado [a,b] de la recta **R**, y diferenciables en el intervalo abierto (a, b), existe un punto c en (a, b) tal que

$$(5.1) \qquad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Para funciones diferenciables $f : U \to \mathbf{R}^n$, con n>**1** no existe tal teorema.

.

5.1 **Ejemplo** Sea

$$r(t) = (t-t^2 ,t-t^3) : [0,1]\to \mathbf{R}^2,$$

una curva diferenciable en $\mathbf{R}^2$.La derivada de tal curva es

$$r'(t)= (1-2t,1-3t^2).$$

Además r(0)=r(1)= (0,0).Supongamos que existe un real c en el intervalo (0,1), tal que

$$r(1)-r(0) = r'(c),$$

es decir

$$1-2c=0,\ 1-3c=0,$$

lo cual implica que c=1/2 = 1/3.

Consideremos ahora funciones vectoriales de varias variables $f : U \rightarrow \mathbf{R}$,donde U es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^m$. Sean p, q dos puntos de U. El **segmento** que une los puntos p, q de U, es el conjunto

$$L(p,q) = \{ p + t (q-p) : t \varepsilon [0,1]\},$$

la función

$$(5.2) \qquad r(t) = p + t(q - p): [0,1] \rightarrow U,$$

es una **parametrización** del segmento L(p,q).El conjunto U es **convexo**, si contiene al segmento que une a dos cualesquiera de sus puntos.
A continuación enunciaremos y demostraremos un teorema del valor medio para funciones vectoriales de varias variables

5.4 **Teorema (Teorema del Valor Medio para Funciones Vectoriales de Varias Variables)** Sea U un subconjunto convexo de $\mathbf{R}^m$ y $f :U\rightarrow \mathbf{R}^n$, una función diferenciable en U. Sean p, q dos puntos de U. Entonces existe un punto c en el segmento que une los puntos p, q tal que

$$(5.3) \qquad \| f(q)-f(p) \| \leq \| df_p (q-p). \| .$$

Demostración: Si f(p) = f(q) el teorema es trivial. Supongamos que f(p) es diferente de f(q), y sea

$$y = f(q) - f(p) , \text{ y sea } u = y/ \| y \|,$$

el vector unitario en dirección de y. Consideremos la función

$$g(x) = f(x).u :U \rightarrow \mathbf{R}$$

que es el producto escalar de f(x) y u. La función g es diferenciable, en efecto

$$g(x+h) - g(x) = [f(x+h)-f(x)] . u$$

$$= [df_x (h) + o(h)].u$$

$$= df_x (h).u + o(h).u.$$

Luego $\qquad dg_x(h) = df (x)(h) .u.$

Por el Teorema del valor medio para funciones reales de varias variables, existe un punto c en el segmento que une a los puntos p,q, tal que

$$g(q) - g(p) = dg_c\,(q - p).$$

Pero

$$g(q)-g(p) = [f(q)-f(p)].\,[f(q) - f(p)] / \| f(q)-f(p) \| = \| f(q) - f(p) \|$$

Entonces, por la desigualdad de Schwarz,

$$\| f(q) - f(p) \| = dg_c\,(q - p) = df_c\,(q-p).u \leq \| df_c\,(q - p) \| .$$

qed

Bibliografía

1.- Apostol Tom M**. Mathematical Analysis** Addison Wesley Publishing Company
2.-Bartle G. Robert **Introducción** al **Análisis Matemático** Editorial Limusa
3.-Corwin L. J. ,Szczarba R.H.**Calculus** in **Vector Spaces**. Marcel Dekker Inc.
4.-Dieudonne, J. **Foundations** of **Modern Analysis**. Academic Press(1960)
5.- Halmos , P.R. **Measure Theory**
6.- Marsden E.J._ Tromba, A.J. **Cálculo Vectorial**. Addisson Wesley, Iberoamericana
7.- Royden,H.L. **Real Analysis**.The Mc Millan Company. (1963)
8.- W. Rudin **Principios** de **Análisis Matemático**.Tercera Edición. Mc Graw Hill