Fibraciones y Correflexiones

Enríque Guillermo Bazúa Durán

2013

Índice general

Introducción

El objetivo del presente trabajo es contextualizar una pregunta que Graciela Salicrup y Roberto Vázquez formulan en el artículo "Fibraciones y Correflexiones" [1]; concretamente, saber si toda $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión es una fibración de Hurewicz.

De esto se desprendería inmediatamente, gracias a los resultados expuestos en dicho artículo, si $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ es o no una h-subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

A fin de aclarar el contexto de la conjetura, se estudian las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ desde dos perspectivas diferentes.

En el capítulo 2 se da la definición de subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ y algunos ejemplos que ilustran un método para obtener subcategorías correflexivas a partir de una propiedad determinada.

En el capítulo 3 se muestra un método para obtener subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ a partir de ciertas clases de funciones.

Por último en el capítulo 4 se describe a un tipo particular de 1-clase, y a través de una de ellas se define la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$. Se describe a dicha subcategoría junto con sus correflexiones y se formula la conjetura.

El capítulo 1 tiene como objetivo servir de glosario, fijar notación, y en caso de ser necesario, como recordatorio de ciertos conceptos o resultados.

No hay mejor introducción al artículo "Fibraciones y Correflexiones" [1], que la que realizó Leticia Montoya en su trabajo homónimo [2], el presente texto sigue el orden de dicho trabajo y se recomienda su lectura a quien encuentre poca claridad en alguna demostración aquí expuesta u omitida. Así mismo, si este trabajo parece abundar en detalles, se recomienda la lectura directa del artículo.

Capítulo 1

Preliminares

El presente capítulo tiene como objetivo servir de glosario, fijar notación, y en caso de ser necesario, como recordatorio de ciertos conceptos o resultados. Se recomienda por tanto iniciar la lectura en el capítulo 2 y sólo consultar este cuando sea necesario.

Se entenderá, a lo largo de este texto, por $\mathfrak{Set}$ a la categoría que consta de:

1. la clase de todos los conjuntos, la cual se denotará por $Ob(\mathfrak{Set})$
2. la clase de todas las funciones entre ellos, la cual se denotará por $Mor(\mathfrak{Set})$
3. la clase de las funciones identidad, la que se denotará por $Id(\mathfrak{Set})$
4. una ley de composición entre funciones, que es la composición usual de funciones.

Al hacer referencia a una función f cuyo dominio sea el conjunto X y cuyo contradominio sea el conjunto Y, se abreviará todo esto con la siguiente notación: $f \in \mathfrak{Set}(X, Y)$.

A la función identidad de dominio X se le denotará por 1_X.

Así mismo, a lo largo de este texto se entenderá por $\mathfrak{Top}$ a la categoría que consta de:

1. la clase de todos los espacios topológicos, la cual se denotará por $Ob(\mathfrak{Top})$
2. la clase de todas las funciones continuas entre ellos, la cual se denotará por $Mor(\mathfrak{Top})$
3. la clase de las funciones identidad de cada espacio en sí mismo, la que se denotará por $Id(\mathfrak{Top})$
4. una ley de composición entre funciones continuas, que es la composición usual de funciones.

Cuando τ es una estructura topológica para el conjunto X, el espacio topológico correspondiente se denotará por (X, τ). En caso de no requerir especificar la estructura topológica de que está dotado un conjunto, el espacio topológico se denotará únicamente con el símbolo asignado al conjunto subyacente; así, en vez de escribir (X, τ) se escribirá simplemente X.

Cuando se haga referencia a una función continua f cuyo dominio es el espacio topológico (X,τ) y cuyo contradominio es el espacio topológico (Y,σ), se abreviará todo esto con la siguiente notación: $f \in \mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$, o simplemente $f \in \mathfrak{Top}(X,Y)$.

Al conjunto de todas las topologías para un conjunto X, se le donotará por $\mathfrak{Top}[X]$.

A continuación se presentan algunas definiciones y resultados, todos sin demostración, que en caso de ser necesario se pueden consultar en el libro "Introducción a la Topología" de Graciela Salicrup [3].

1.1. Inicialidad y finalidad

Definición 1.1 *Una **fuente de funciones** es una clase de funciones con dominio común*

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

donde I es una clase que puede ser vacía, singular o propia. Si

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

*es una fuente y $(X_i,\tau_i)_I$ es una clase de espacios topológicos, **la topología inicial de** X **respecto a** $(f_i,\tau_i)_I$ está dada por*

$$\tau = \inf \{\alpha \in \mathfrak{Top}[X] : \forall i \in I, f_i \in \mathfrak{Top}((X,\alpha),(X_i,\tau_i))\}$$

Un sumidero de funciones es una clase de funciones con codominio común

$$(f_i : X_i \to X)_I$$

donde I es una clase que puede ser vacía, singular o propia. Si

$$(f_i : X_i \to X)_I$$

*es un sumidero y $(X_i,\tau_i)_I$ es una clase de espacios topológicos, **la topología final de** X **respecto de** $(\tau_i,f_i)_I$ está dada por*

$$\tau = \sup \{\alpha \in \mathfrak{Top}[X] : \forall i \in I, f_i \in \mathfrak{Top}((X_i,\tau_i),(X,\alpha))\}$$

Definición 1.2 *Se dice que una fuente de funciones*

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

1. ***separa puntos**, si para cualesquiera $x,y \in X, x \neq y$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.*

2. *es una **monofuente** si para cualesquiera $g,h \in \mathfrak{Set}(W,X)$ tales que para toda $i \in I$, $f_i g = f_i h$, se tiene que $g = h$.*

Proposición 1.1 *Una fuente de funciones separa puntos si, y sólo si, es monofuente.*

Definición 1.3 *Se dice que un sumidero de funciones* $(f_i : X_i \to X)_I$

1. **cubre puntos**, si $X = \bigcup\limits_{i \in I} f_i X_i$
2. es un **episumidero** si para cualesquiera $g, h \in \mathfrak{Set}(X, Y)$ tales que para toda $i \in I$, $gf_i = hf_i$, se tiene que $g = h$.

Proposición 1.2 *Un sumidero de funciones cubre puntos si, y sólo si, es episumidero.*

Teorema 1.1 *Si* $(f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i))_I$ *es una fuente de funciones entre espacios topológicos, entonces son equivalentes*

1. τ es inicial respecto a $(f_i, \tau_i)_I$
2. $\bigcup\limits_{i \in I} f_i^{-1} \tau_i := \left\{ f_i^{-1}(U) \subseteq X : i \in I, U \in \tau_i \right\}$ es subbase de τ
3. Para toda $i \in I$, f_i es continua y si $g : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es una función tal que $f_i g$ es continua para toda $i \in I$, entonces g es continua.
4. Para toda $i \in I$, f_i es continua y, si conmuta el siguiente diagrama para toda $i \in I$,

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h"'] & (X_i,\tau_i) \\ (Y,\sigma) \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

   con h biyectiva y continua y g_i continua, entonces h es un homeomorfismo.

Teorema 1.2 *Si* $(f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau))_I$ *es un sumidero de funciones entre espacios topológicos, entonces son equivalentes*

1. τ es final respecto a $(\tau_i, f_i)_I$
2. $\tau = \left\{ U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \text{ para toda } i \in I \right\}$
3. Para toda $i \in I$, f_i es continua y si $g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una función tal que gf_i es continua para toda $i \in I$, entonces g es continua.

4. Para toda $i \in I$, f_i es continua y, si conmuta el siguiente diagrama para toda $i \in I$,

$$\begin{tikzcd} (X_i,\tau_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "g_i"'] & (X,\tau) \\ (Y,\sigma) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

   con h biyectiva y continua y g_i continua, para toda $i \in I$, entonces h es un homeomorfismo.

Teorema 1.3 *Sean* $(f_i : (X,\tau) \to (X_i,\tau_i))_I$ *y* $(g_i : (Y,\sigma) \to (X_i,\tau_i))_I$ *dos fuentes de funciones continuas y* $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ *y una función continua tal que para toda* $i \in I$ *conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f"'] & (X_i,\tau_i) \\ (Y,\sigma) \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

entonces se satisfacen:

1. *Si* τ *es inicial respecto a* $(f_i,\tau_i)_I$, τ *es inicial respecto a* (f,σ).

2. *Si* τ *es inicial respecto a* (f,σ) *y* σ *es inicial respecto a* $(g_i,\tau_i)_I$, τ *es inicial respecto a* $(f_i,\tau_i)_I$.

Teorema 1.4 *Sean* $(f_i : (X_i,\tau_i) \to (X,\tau))_I$ *y* $(g_i : (X_i,\tau_i) \to (W,\omega))_I$ *dos sumideros de funciones continuas y* $f : (W,\omega) \to (X,\tau)$ *y una función continua tal que para toda* $i \in I$ *conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} (X_i,\tau_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "g_i"'] & (X,\tau) \\ (W,\omega) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

entonces se satisfacen:

1. Si τ es final respecto a $(\tau_i, f_i)_I$, τ es final respecto a (f,ω).

2. Si τ es final respecto a (ω, f) y ω es final respecto a $(\tau_i, g_i)_I$, τ es final respecto a $(\tau_i, f_i)_I$.

1.2. Productos y coproductos

Definición 1.4 *Se dice que una fuente de funciones* $(f_i : X \to X_i)_I$ *cumple la* ***propiedad universal del producto*** *si dada cualquiera otra fuente de funciones* $(g_i : W \to X_i)_I$ *existe una única función* $f : W \to X$ *tal que conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f"'] & X_i \\ X \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

En caso de que I *sea un conjunto, se dice que* X *es un* ***producto cartesiano*** *de* $(X_i)_I$ *con* ***proyecciones*** $(f_i)_I$*.*

Definición 1.5 *Se dice que un sumidero de funciones* $(f_i : X_i \to X)_I$ *cumple la* ***propiedad universal del coproducto*** *si dado cualquier otro sumidero de funciones* $(g_i : X_i \to Y)_I$ *existe una única función* $g : X \to Y$ *tal que conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & Y \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

En caso de que I *sea un conjunto, se dice que* X *es un* ***coproducto cartesiano*** *de* $(X_i)_I$ *con* ***coproyecciones*** $(f_i)_I$*.*

Teorema 1.5 *Dadas cualesquiera dos fuentes* $(f_i : X \to X_i)_I$ *y* $(g_i : Y \to X_i)_I$ *que cumplen la propiedad universal del producto (cartesiano) existe una única función* $h : X \to Y$ *biyectiva que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h"'] & X_i \\ Y \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

Debido a esto se habla de X *como de* ***el*** *producto (cartesiano) del conjunto* $(X_i)_I$*, y se denota por* $\prod_{i \in I} X_i$*.*

Observación 1.1 *Está notación generalmente se emplea para denotar al conjunto*

$$\left\{ f \in \mathfrak{Set}\left(I, \bigcup_{i \in I} X_i\right) : f(i) \in X_i, \text{ para toda } i \in I \right\}$$

Es fácil probar que la fuente (de ***proyecciones canónicas****)*

$$\left(p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i\right)_I$$

donde para toda $i \in I$

$$\begin{array}{rccc} p_i : & \prod\limits_{i\in I} X_i & \to & X_i \\ & f & \mapsto & f(i) \end{array}$$

cumple la propiedad universal del producto (cartesiano). Esto y el teorema anterior justifican el empleo de esta notación.

Teorema 1.6 *Dados cualesquiera dos sumideros $(f_i : X_i \to X)_I$ y $(g_i : X_i \to W)_I$ que cumplen la propiedad universal del coproducto (cartesiano) existe una única función $h : W \to X$ biyectiva que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "g_i"'] & X \\ W \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Debido a esto se habla de X como de ***el*** *coproducto (cartesiano) del conjunto $(X_i)_I$, y se denota por $\coprod\limits_{i\in I} X_i$.*

Observación 1.2 *Está notación generalmente se emplea para denotar al conjunto*

$$\bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\})$$

Es fácil probar que el sumidero (de ***coproyecciones canónicas*** *o* ***inclusiones canónicas****)*

$$\left(\iota_i : X_i \to \coprod_{i\in I} X_i\right)_I$$

donde para toda $i \in I$

$$\begin{array}{rccc} \iota_i : & X_i & \to & \coprod\limits_{i\in I} X_i \\ & x & \mapsto & (x, i) \end{array}$$

cumple la propiedad universal del coproducto (cartesiano). Esto y el teorema anterior justifican el empleo de esta notación.

Definición 1.6 *Dado un conjunto I, se dice que una fuente de funciones continuas $(f_i : X \to X_i)_I$ cumple la **propiedad universal del producto topológico** si dada cualquiera otra fuente de funciones continuas $(g_i : W \to X_i)_I$ existe una única función continua $f : W \to X$ tal que conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f"'] & X_i \\ X \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

*En tal caso se dice que X es un **producto topológico** de $(X_i)_I$ con **proyecciones** $(f_i)_I$.*

Definición 1.7 *Dado un conjunto I, se dice que un sumidero de funciones continuas $(f_i : X_i \to X)_I$ cumple la **propiedad universal del coproducto topológico** si dada cualquier otro sumidero de funciones continuas $(g_i : X_i \to Y)_I$ existe una única función continua $g : X \to Y$ tal que conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & Y \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

*En tal caso se dice que X es un **coproducto topológico** de $(X_i)_I$ con **coproyecciones** $(f_i)_I$.*

Teorema 1.7 *Dado un conjunto I y dadas cualesquiera dos fuentes de funciones contiuas $(f_i : X \to X_i)_I$ y $(g_i : Y \to X_i)_I$ que cumplen la propiedad universal del producto topológico existe un único homeomorfismo $h : X \to Y$ que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h"'] & X_i \\ Y \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

*Debido a esto se habla de X como de **el** producto topológico del conjunto $(X_i)_I$, y se denota por $\prod_{i \in I} X_i$.*

Teorema 1.8 *Dado un conjunto I y dados cualesquiera dos sumideros de funciones continuas $(f_i : X_i \to X)_I$ y $(g_i : X_i \to W)_I$ que cumplen la propiedad universal del coproducto* *topológico existe un único homeomorfismo $h : W \to X$ que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "g_i"'] & X \\ W \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Debido a esto se habla de X como de ***el*** *coproducto topológico del conjunto $(X_i)_I$, y se denota por $\coprod\limits_{i\in I} X_i$.*

Definición 1.8 *Si $(f_i : X_i \to Y_i)_I$ es un conjunto de funciones, el* ***producto (cartesiano)*** *de $(f_i)_I$, que denotaremos por Πf_i, es la única función que para toda $i \in I$ hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{m\in I} X_m \arrow[r, "\prod f_m"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod\limits_{m\in I} X_m \arrow[d, "q_i"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Definición 1.9 *Si $(f_i : X_i \to Y_i)_I$ es un conjunto de funciones, el* ***coproducto (cartesiano)*** *de $(f_i)_I$, que denotaremos por $\coprod f_i$, es la única función que para toda $i \in I$ hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \coprod\limits_{m\in I} X_m \arrow[d, "\coprod f_m"] \\ Y_i \arrow[r, "\kappa_i"'] & \coprod\limits_{m\in I} X_m \end{tikzcd}$$

Teorema 1.9 *El producto cartesiano de funciones continuas es continuo.*

Teorema 1.10 *El coproducto cartesiano de funciones continuas es continuo.*

Teorema 1.11 *Sea $I \times J$ un conjunto de índices. Entonces:*

$$\prod_{i\in I}\left(\prod_{k\in J} X_{(i,k)}, \tau_i\right) \cong \prod_{I\times J}\left(X_{(i,j)}, \tau_{(i,j)}\right)$$

donde τ_i es la topología inicial para $\prod\limits_{k\in J} X_{(i,k)}$ respecto de las proyecciones canónicas; y

$$\coprod_{i\in I}\left(\coprod_{k\in J} X_{(i,k)}, \tau_i\right) \cong \coprod_{I\times J}\left(X_{(i,j)}, \tau_{(i,j)}\right)$$

donde τ_i es la topología final para $\coprod\limits_{k\in J} X_{(i,k)}$ respecto de las inclusiones canónicas.

Teorema 1.12 *Dados, un espacio topológico* (X,τ) *y una partición* $(X_i)_I$ *de* X *en conjuntos abiertos, se tiene que:*

$$(X,\tau) \cong \coprod_{i\in I} (X_i, \tau\mid_{X_i})$$

Observación 1.3 *Para simplificar la notación, y dado que la proyección canónica*

$$\begin{array}{rccc} p: & \coprod\limits_{i\in I} (X_i, \tau\mid_{X_i}) & \to & (X,\tau) \\ & (x,i) & \mapsto & x \end{array}$$

es un homeomorfismo, no se hará distinción entre ambos espacios.

Definición 1.10 *Una función continua* $s : X \to Y$ *se llama* ***sección*** *en* $\mathfrak{Top}$ *si existe* $r : Y \to X$ *continua tal que* $rs = 1_X$.

Definición 1.11 *Una función continua* $r : X \to Y$ *se llama* ***retracción*** *en* $\mathfrak{Top}$ *si existe* $s : Y \to X$ *continua tal que* $rs = 1_Y$.

Definición 1.12 *Una función* $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ *se llama* ***inmersión*** *si es inyectiva y* τ *es inicial respecto a* (f,σ).

Definición 1.13 *Una función* $p : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ *se llama* ***identificación*** *si es suprayectiva y* σ *es final respecto a* (τ, f).

Teorema 1.13 *Toda sección es una inmersión.*

Teorema 1.14 *Toda retracción es un identificación.*

1.3. Fibraciones

Definición 1.14 *Un espacio topológico* X *es* ***totalmente inconexo por trayectorias*** *si para toda* $x \in X$*, la componente por trayectorias de* x *es* $\{x\}$.

Observación 1.4 I *denotará al intervalo* $[0,1]$ *con su topología usual.*

Proposición 1.3 *Dado un espacio topológico* X*, son equivalentes:*

(i) X es totalmente inconexo por trayectorias.
(ii) Si $f \in \mathfrak{Top}(I,X)$, entonces f es constante.

Definición 1.15 *Dado* $\{f,g\} \subseteq \mathfrak{Top}(X,Y)$*, se dice que* f ***es homotópica a*** g *(*$f \simeq g$*) si existe* $H \in \mathfrak{Top}(X\times I, Y)$ *tal que:*

$$H\mid_{X\times\{0\}} = f \quad y \quad H\mid_{X\times\{1\}} = g$$

En este caso H ***es una homotopía entre*** f *y* g*, (*$f \overset{H}{\simeq} g$ *o* $H : f \simeq g$*).*

Definición 1.16 *Se dice que dos espacios topológicos X, Y* ***son del mismo tipo de homotopía*** *($X \simeq Y$) si existen*

$$f \in \mathfrak{Top}(X, Y) \quad y \quad g \in \mathfrak{Top}(Y, X)$$

tales que

$$gf \simeq 1_X \quad y \quad fg \simeq 1_Y$$

En tal caso se dice que f y g son ***equivalencias homotópicas****.*

Definición 1.17 *Un espacio topológico X es* ***contraíble*** *si 1_X es homotópica a una constante.*

Definición 1.18 *Dados $\{f, g\} \subseteq \mathfrak{Top}(X, Y)$ y $A \subseteq X$, se dice que f* ***es homotópica a*** *g* ***relativa a*** *A ($f \simeq g$ relA) si existe $H \in \mathfrak{Top}(X \times I, Y)$ tal que:*

$$H\mid_{X\times\{0\}} = f \quad y \quad H\mid_{X\times\{1\}} = g \quad y \quad H\mid_{A\times I} = f\mid_A$$

Definición 1.19 *Se dice que $f \in \mathfrak{Top}(X, Y)$* ***tiene la propiedad del levantamiento (único) de homotopías respecto a un espacio topológico*** *W si, dado el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\
W \times I \arrow[r, "H"'] & Y
\end{tikzcd}$$

donde para toda $w \in W, h_0(w) = (w, 0)$, existe (exactamente una) $\widetilde{H} \in \mathfrak{Top}(X \times I, Y)$ tal que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\
W \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

En tal caso, la aplicación $\widetilde{H}$ se llama ***levantamiento de*** *H* ***que empieza con*** *g.*

Definición 1.20 *Una función continua $p : E \to B$ se llama* ***fibración de Hurewicz*** *si p tiene la propiedad del levantamiento de homotopías respecto a cualquier espacio topológico.*

Proposición 1.4 *Toda aplicación cubriente es una fibración de Hurewicz.*

Proposición 1.5 *Si un espacio topológico B es totalmente inconexo por trayectorias y $b \in B$, entonces $\{b\} \hookrightarrow B$ es una fibración de Hurewicz.*

Proposición 1.6 *Si B y F son espacios topológicos, entonces la proyección $p : B \times F \to B$ es una fibración de Hurewicz que se llama **fibración trivial**.*

Definición 1.21 *Dados $f \in \mathfrak{Top}\left((X,\tau),(Y,\sigma)\right)$ y $y \in Y$, la fibra de f sobre y es $\left(f^{-1}(y), \tau\mid_{f^{-1}(y)}\right)$.*

Observación 1.5 *Las fibras de la fibración trivial $p : B \times F \to B$ son homeomorfas a F, por lo tanto, si F no es discreto, entonces p no es aplicación cubriente.*

Definición 1.22 *Se dice que una fibración de Hurewicz $p : E \to B$ tiene la **propiedad del levantamiento único de trayectorias** si dadas $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{Top}(I, E)$ se tiene que:*

$$\textit{si } p\omega_1 = p\omega_2 \textit{ y } \omega_1(0) = \omega_2(0)\,, \textit{ entonces } \omega_1 = \omega_2$$

Teorema 1.15 *Si $p : E \to B$ es una fibración de Hurewicz, entonces son equivalentes:*

1. p tiene la propiedad del levantamiento único de trayectorias.
2. Dados Y conexo por trayectorias, $f, g \in \mathfrak{Top}(Y, E)$, $y_0 \in Y$ tal que $f(y_0) = g(y_0)$ y $pf = pg$, entonces $f = g$.
3. p tiene la propiedad del levantamiento único de homotopía.
4. Para toda $b \in B$, $p^{-1}(b)$ es totalmente inconexo por trayectorias.

Corolario 1.1 *Si $p : E \to B$ es una fibración de Hurewicz con la propiedad del levantamiento único de trayectorias y ω_1, ω_2 son tales que $\omega_1(0) = \omega_2(0)$ y $p\omega_1 \simeq p\omega_2$ rel $\{0,1\}$, entonces $\omega_1 \simeq \omega_2$ rel $\{0,1\}$.*

Proposición 1.7 *La composición de fibraciones de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias) es fibración de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias).*

Teorema 1.16 *Si $p \in \mathfrak{Top}(E, B)$ y E es localmente conectable por trayectorias, entonces son equivalentes:*

1. p es fibración de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias).
2. Para cada componente por trayectorias C de E, la restricción de p

   $$\begin{array}{rccc} \widetilde{p}: & C & \to & p(C) \\ & c & \mapsto & p(c) \end{array}$$

   es fibración de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias) y $p(C)$ es componente por trayectorias de B.

1.4. Espacios de funciones

Definición 1.23 *Dados X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, se define:*

$$(A, B) := \{f \in \mathfrak{Top}(X, Y) : f(A) \subseteq B\}$$

Definición 1.24 *La **topología compacto abierta** para $\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$, que será denotada por κ, es la que tiene por subbase a:*

$$\beta := \left\{(K, U) \subseteq \mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma)) : U \in \sigma \quad y \quad (K, \tau|_K) \text{ es compacto}\right\}$$

El espacio $(\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma)),\kappa)$ será denotado por $\mathfrak{M}((X,\tau),(Y,\sigma))$. En caso de que se denote a los espacios únicamente como X y Y, el espacio $(\mathfrak{Top}(X,Y),\kappa)$ será denotado por $\mathfrak{M}(X,Y)$.

Definición 1.25 *Dados los conjuntos X, Y, Z, se definen:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathfrak{Set}(X \times Y, Z) & \longrightarrow & \mathfrak{Set}(X, \mathfrak{Set}(Y, Z)) \\ & f : X \times Y \to Z & \longmapsto & \varphi(f) : X \to \mathfrak{Set}(Y, Z) \end{array}$$

donde $[\varphi(f)](x) = f|_{\{x\}\times Y}$ y

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathfrak{Set}(X, \mathfrak{Set}(Y, Z)) & \longrightarrow & \mathfrak{Set}(X \times Y, Z) \\ & g : X \to \mathfrak{Set}(Y, Z) & \longmapsto & \psi(g) : X \times Y \to Z \end{array}$$

donde $[\psi(g)](x, y) = [g(x)](y)$.

Proposición 1.8 *Dados los conjuntos X, Y, Z, se satisfacen:*

$$\psi\varphi = 1_{\mathfrak{Set}(X\times Y, Z)} \quad y \quad \varphi\psi = 1_{\mathfrak{Set}(X, \mathfrak{Set}(Y, Z))}$$

Proposición 1.9 *Dados los espacios topológicos X, Y, Z, si Y es localmente compacto y regular, entonces:*

$$\varphi : \mathfrak{Top}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathfrak{Top}(X, \mathfrak{M}(Y, Z))$$

es biyectiva.

Observación 1.6 *Como I es localmente compacto y regular, entonces:*

$$\varphi : \mathfrak{Top}(X \times I, Z) \longrightarrow \mathfrak{Top}(X, \mathfrak{M}(I, Z))$$

es biyectiva.

Observación 1.7 *Dado $t \in I$, la evaluación en t*

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{e}_t : & \mathfrak{M}(I, Z) & \to & Z \\ & f & \mapsto & f(t) \end{array}$$

es continua.

Observación 1.8 *Dados los espacios topológicos X, Y y $f \in \mathfrak{Top}(X, Y)$, entonces $\Pi f \in \mathfrak{Set}(\mathfrak{M}(I, X), \mathfrak{M}(I, Y))$ es continua. Cabe aclarar que Πf no es precisamente el producto de funciones, sino la restricción de dicho producto al dominio correspondiente, pero se denotará de esta forma por simplificar la notación.*

1.5. Retículas

Definición 1.26 *Si α es un orden parcial (i.e. es una relación binaria en X reflexivo, antisimétrico y transitivo) en un conjunto X, se dice que (X, α) es un* ***conjunto parcialmente ordenado (copo)****.*

Definición 1.27 *Si (X, α) es un copo y $Y \subseteq X$, entonces:*

- $x \in X$ **es un ínfimo para** Y si, y solamente si, x es una cota inferior de Y (i.e. $(x, y) \in \alpha$, para toda $y \in Y$) y es la más grande de las cotas inferiores de Y (i.e. $(z, y) \in \alpha$ implica $(z, x) \in \alpha$)

- $x \in X$ **es un supremo para** Y si, y solamente si, x es una cota superior de Y (i.e. $(y, x) \in \alpha$, para toda $y \in Y$) y es la más grande de las cotas superiores de Y (i.e. $(y, z) \in \alpha$ implica $(x, z) \in \alpha$)

Definición 1.28 *Una* ***retícula*** *es un copo en el que toda pareja de elementos tiene ínfimo y supremo.*

Definición 1.29 *Una retícula es* ***completa*** *si todo subconjunto tiene ínfimo o supremo (una implica a la otra).*

Definición 1.30 *En una retícula completa (X, α) los elementos $\text{ínf}\, X$ y $\sup X$ reciben los nombres de* ***elemento cero*** *y* ***elemento uno****, respectivamente, y se denotan por 0 y 1, respectivamente.*

1.6. Subcategorías de $\mathfrak{Top}$

Definición 1.31 *Una* ***subcategoría de*** $\mathfrak{Top}$ *es la categoría $\underline{A}$ que consta de:*

1. una clase de espacios topológicos, la cual se denotará por $Ob(\underline{A})$ y cuyos elementos se llamarán $\underline{A}$-espacios.

2. una clase de funciones continuas entre ellos, la cual se denotará por $Mor(\underline{A})$.

3. la clase de las funciones identidad de cada $\underline{A}$-espacio en sí mismo, la que se denotará por $Id(\underline{A})$.

4. una ley de composición entre funciones continuas, que es la composición usual de funciones.

Definición 1.32 *Dada $\underline{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, se dice que es:*

1. **plena** si dados dos $\underline{A}$-espacios cualesquiera X, Y se tiene que $f \in \mathfrak{Top}\,(X, Y)$ implica $f \in Mor(\underline{A})$.

2. **repleta** si $Ob(\underline{A})$ es cerrada bajo homeomorfismos.

Capítulo 2

Subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$

Puede pensarse a la Topología como el estudio de las propiedades que se preservan bajo transformaciones continuas. Bajo esta idea, el asociar a cada una de estas propiedades una clase de espacios topológicos podría ayudar a entenderlas y clasificarlas.

Las subcategorías correflexivas logran en cierto modo esto, y tal vez el origen de su estudio sea precisamente ese.

A continuación se presentan las definiciones de dichas clases, algunos resultados y dos ejemplos.

2.1. Definiciones

Definición 2.1 *Una* $\mathfrak{Top}$***-clase*** *es una clase* $\underline{\mathbf{A}}$ *de espacios topológicos cerrada bajo homeomorfismos. Los elementos de la* $\mathfrak{Top}$*-clase* $\underline{\mathbf{A}}$ *se llaman* $\underline{\mathbf{A}}$***-espacios.***

Observación 2.1 *Al considerar a las subcategorías plenas y repletas de* $\mathfrak{Top}$*, se puede observar que esencialmente no existe diferencia entre dichas subcategorías, las propiedades topológicas y las* $\mathfrak{Top}$*-clases.*

Definición 2.2 *Dada* $\underline{\mathbf{A}}$ *una* $\mathfrak{Top}$*-clase, una* $\underline{\mathbf{A}}$***-correflexión de un espacio topológico*** X *es una función continua* $c : A \to X$ *que satisface: (i)* $A \in \underline{\mathbf{A}}$*; (ii) Para toda* $A' \in \underline{\mathbf{A}}$ *y para toda* $f \in \mathfrak{Top}\,(A', X)$*, existe una, y solamente una,* $g \in \mathfrak{Top}\,(A', A)$ *tal que* $cg = f$*. Es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ A \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

En tal caso se dice que X *es* $\underline{\mathbf{A}}$***-correflejable*** *y que* A *es su* $\underline{\mathbf{A}}$***-correflector****.*

Ejemplo 2.1 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier $\mathfrak{Top}$-clase y A es cualquier $\underline{\mathbf{A}}$-espacio, se tiene que la función*

$$\begin{array}{rccc} 1_A : & (A, \alpha) & \to & (A, \alpha) \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de A.

Ejemplo 2.2 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier $\mathfrak{Top}$-clase y h un homeomorfismo cuyo dominio es un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio, se tiene que h es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de su codominio.*

Definición 2.3 *Si la $\mathfrak{Top}$-clase $\underline{\mathbf{A}}$ es tal que cualquier espacio topológico X es $\underline{\mathbf{A}}$-correflejable, entonces, a la subcategoría plena y repleta cuya clase de objetos es precisamente $\underline{\mathbf{A}}$, se le llama una* ***subcategoría correflexiva de*** *$\mathfrak{Top}$, que por abuso de notación se denotará como $\underline{\mathbf{A}}$.*

Proposición 2.1 *El $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de un espacio X es único salvo homeomorfismos.*

Demostración: Sean c y c' $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de X. Entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h"'] & X \\ A' \arrow[ur, "c'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "h'"'] & X \\ A \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

donde h y h' son las funciones continuas únicas que existen por ser A y A' $\underline{\mathbf{A}}$-correflectores. Siendo así, la composición $h'h$ es una función continua de A en A tal que

$$c\,(h'h) = (ch')\,h = c'h = c$$

por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c(h'h)"] \arrow[d, "1_A"'] & X \\ A \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto

$$h'h = 1_A.$$

Análogamente se puede probar que $hh' = 1_{A'}$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

Proposición 2.2 *Todo espacio homeomorfo al $\underline{\mathbf{A}}$-correflector del espacio X es también un $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de X.*

Demostración: Sea A un $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de X y sea $h : A' \to A$ un homeomorfismo.

Sea $f : B \to X$ cualquier función continua, con $B \in \underline{\mathbf{A}}$; entonces existe una función continua única $g : B \to A$ tal que $cg = f$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "h^{-1}g"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "f"] & \\
A' \arrow[r, "h"'] & A \arrow[r, "c"'] & X
\end{tikzcd}$$

en el cual vemos que:

$$(ch)\left(h^{-1}g\right) = c\left(hh^{-1}\right)g = f$$

es decir, ch es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión, pues $h^{-1}g$ es única por la unicidad de g.⧫

Proposición 2.3 $(\{\emptyset\}, \{1_\varnothing\}, \{1_\varnothing\}, \circ)$ *es la mínima subcategoría correflexiva de* $\mathfrak{Top}$.

Demostración Para cualquier espacio topológico X se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, "\emptyset"] \arrow[d, "\emptyset"'] & X \\
\emptyset \arrow[ur, "\emptyset"'] &
\end{tikzcd}$$

del cual queda claro que $(\{\emptyset\}, \{1_\varnothing\}, \{1_\varnothing\}, \circ)$ es una subccategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$. Que es mínima, se sigue de que el único correfelctor del espacio $\emptyset$ es él mismo.⧫

Observación 2.2 *En adelante se denotará a* $(\{\emptyset\}, \{1_\varnothing\}, \{1_\varnothing\}, \circ)$ *como* $\underline{\{\emptyset\}}$*, a fin de simplificar la notación.*

2.2. Subcategorías bicorreflexivas

Teorema 2.1 *Si* $\underline{\mathbf{A}}$ *es cualquier subcategoría correflexiva cuya clase de objetos tiene elementos no vacíos, entonces toda* $\underline{\mathbf{A}}$*-correflexión debe ser biyectiva.*

Demostración. Dados $X \in \mathfrak{Top}$, $c : A \to X$ una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X y $B \in \underline{\mathbf{A}}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo para cualquier $f \in \mathfrak{Top}(B, X)$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\
A \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $X = \varnothing$ entonces $c = \phi$ y por tanto biyectiva.

De otro modo, si $x \in X$ y f es tal que $f(b) = x$ para toda $b \in B$, entonces f es continua y para toda $b \in B$:

$$c(g(b)) = f(b) = x$$

Por lo tanto, c es suprayectiva.

Si $a_1, a_2 \in A$ son tales que $c(a_1) = c(a_2)$ y f tal que $f(b) = c(a_1)$ para toda $b \in B$, entonces, como f es continua, g debe ser única y tal que:

$$c(g(b)) = f(b) = c(a_i), \text{ para } i \in \{1, 2\}$$

Defínase

$$\begin{array}{rlcl} g_i : & (B, \beta) & \to & (A, \alpha) \\ & b & \mapsto & a_i \end{array}$$

y nótese que g_i es continua y satisface que para toda $b \in B$,

$$c(g_i(b)) = f(b), \text{ para } i \in \{1, 2\}$$

Entonces $g_1 = g_2$, y por tanto $a_1 = a_2$, por lo cual c es inyectiva.♦

Debido a lo anterior, se tiene la siguiente

Definición 2.4 *Se llama **subcategoría bicorreflexiva** a toda subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos.*

Observación 2.3 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X, τ) es cualquier espacio topológico, entonces una de las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de (X, τ) es de la forma 1_X.*

Demostración. Supóngase que

$$c : (A, \alpha) \to (X, \tau)$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X, τ), sea

$$\tau' = \{V \subseteq X : c(U) = V \text{ para algún } U \in \alpha\}$$

Como c es biyectiva, τ' es una topología para X y

$$c^{-1} : (X, \tau') \to (A, \alpha)$$

se vuelve continua pues τ' es en realidad la topología inicial para X correspondiente a $c^{-1} : X \to (A, \alpha)$ y a α, es decir,

$$\begin{aligned} \tau' &= \left\{V \in \mathsf{Pot}(X) : \left(c^{-1}\right)^{-1}(U) = V \text{ para algún } U \in \alpha\right\} \\ &= \{V \in \mathsf{Pot}(X) : c(U) = V \text{ para algún } U \in \alpha\} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$c^{-1} : (X, \tau') \to (A, \alpha)$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto, $(X, \tau') \in \underline{\mathbf{A}}$ y, por la proposición 2.2,

$$cc^{-1} = 1_X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X, τ).♦

Teorema 2.2 *La $\mathfrak{Top}$-clase de los espacios discretos es la clase de objetos de la mínima subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Sea $\underline{\mathbb{D}}$ la subcategoría plena y repleta de $\mathfrak{Top}$ cuya clase de objetos es la $\mathfrak{Top}$-clase de los espacios discretos.

(a) $\underline{\mathbb{D}}$ *es bicorreflexiva:* Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(W, \mathsf{Pot}(W)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & (X, \tau) \\
(X, \mathsf{Pot}(X)) \arrow[ur, "1_X"'] &
\end{tikzcd}$$

donde cada función es continua, pues el dominio es discreto. Además $Ob\,(\underline{\mathbb{D}})$ tiene elementos no vacíos; por lo tanto $\underline{\mathbb{D}}$ es bicorreflexiva.

(b) $\underline{\mathbb{D}}$ *es la mínima bicorreflexiva:* Sea $\underline{\mathbf{A}}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y X cualquier espacio topológico discreto. Entonces existe una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión

$$c : A \to X$$

que, como se sabe, es continua y biyectiva. Como X es discreto, también c^{-1} es continua; por lo tanto c es un homeomorfismo y $X \in \underline{\mathbf{A}}$. Por lo tanto, $\underline{\mathbb{D}} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$.♦

Ahora es posible, a través de un par de ejemplos, ilustrar una técnica para asociar una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ a una propiedad que se preserva bajo funciones continuas.

2.3. Espacios finitamente generados

Definición 2.5 *Un espacio topológico (X, τ) está **finitamente generado** si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X, τ). Es decir, τ es la topología más fina para X que hace continuas a las inclusiones de los subespacios finitos de (X, τ).*

Definición 2.6 *Al conjunto de subespacios finitos de (X, τ) se le denotará como $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X, \tau)$; es decir:*

$$\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X, \tau) := \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$$

Ejemplo 2.3 *Todo espacio discreto está finitamente generado.*

En efecto, las inclusiones son continuas y $\tau = \sup \mathfrak{Top}[X]$. ♦

Ejemplo 2.4 *Todo espacio indiscreto está finitamente generado.*

En efecto, sea τ la topología indiscreta para X y considérese el sumidero

$$(\iota_F : (F, \tau\mid_F) \hookrightarrow (X, \tau))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X,\tau)}$$

de inclusiones de los subespacios finitos de (X, τ). Hay que probar que en este caso la topología final para X correspondiente a $(\tau\mid_F)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X,\tau)}$ y a $(\iota_F)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X,\tau)}$ es la topología indiscreta. Sea τ' dicha topología; se procederá por reducción al absurdo suponiendo que hay un subconjunto propio de X, no vacío y miembro de τ'. Sea U tal subconjunto de X; entonces, para toda $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X, \tau)$

$$\iota_F^{-1}(U) \in \tau\mid_F$$

Por ser no vacío existe al menos un $x \in U$. Por ser subconjunto propio, tampoco $X - U$ es vacío, por lo que existe $y \in X - U$; entonces $x \neq y$ y el subespacio de X

$$\left(\{x, y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right)$$

es un subespacio finito (e indiscreto) y miembro de la familia $(F, \tau\mid_F)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X,\tau)}$ de subespacios finitos de (X, τ). Sin embargo, para la inclusión correspondiente

$$\iota : \left(\{x, y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right) \hookrightarrow (X, \tau)$$

se tiene que

$$\iota^{-1}(U) = \{x\} \notin \tau\left|_{\{x,y\}}\right.$$

lo cual contradice el hecho de que U es miembro de la topología final. Luego $U = X$, lo que significa que τ es la topología final. Por lo tanto

$$(\iota_F : (E, \tau\mid_F) \hookrightarrow (X, \tau))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X,\tau)}$$

es final y (X, τ) está finitamente generado.♦

Teorema 2.3 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
(a) (X, τ) está finitamente generado.
(b) Las intersecciones arbitrarias de abiertos son abiertas.
(c) Las uniones arbitrarias de cerrados son cerradas.
(d) Si $(A_i)_I$ es cualquier familia de subconjuntos de X, entonces

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sea $(A_i)_I$ cualquier conjunto de subconjuntos abiertos de (X, τ) y sea $A = \bigcap_{i \in I} A_i$. Por (a), $U \in \tau$ si, y solamente si, $U \cap F \in \tau|_F$, para todo $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X, \tau)$. En consecuencia, para cada F que se fije, se tiene que

$$A \cap F = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap F)$$

es una intersección finita de abiertos de F (posiblemente de muchos intersectandos repetidos). Luego, para toda $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X, \tau)$

$$A \cap F \in \tau|_F$$

Por lo tanto, $A \in \tau$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Hay que probar que es final el sumidero de inclusiones del conjunto de subespacios finitos de (X, τ)

$$\mathcal{S} = (\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X, \tau))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)}$$

para lo cual basta demostrar que si $U \subseteq X$ es tal que $U \cap F \in \tau|_F$ para todo $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)$, entonces $U \in \tau$. Escójase U con esas características y un punto $x \in U$. Por (b), x posee una vecindad abierta mínima $V(x)$ según τ; a saber:

$$V(x) = \cap \{W \in \tau : x \in W\}$$

Ahora bien, si ocurriese que $V(x) - U \neq \varnothing$, entonces se podría escoger

$$y \in V(x) - U$$

y formar el subespacio finito $\{x, y\}$. Entonces

$$U \cap \{x, y\} = \{x\} \in \tau\,\big|_{\{x,y\}}$$

lo cual implicaría que este abierto relativo $\{x\}$ debería producirse también al intersectar el abierto absoluto más chico que contiene a x con $\{x, y\}$. Pero esto sería falso, porque $V(x) \cap \{x, y\} = \{x, y\}$ $\underset{\circ}{\nabla}$. Por lo tanto, $V(x) \subseteq U$; por lo que, $U \in \tau$ y $\mathcal{S}$ es final.
$(b) \Rightarrow (c)$: Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos cerrados de (X, τ) y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Por (b),

$$X - A = \bigcap_{i \in I} (X - A_i) \in \tau$$

Por lo tanto, A es cerrado.
$(c) \Rightarrow (d)$: Sea $(A_i)_I$ una familia arbitraria de subconjuntos de (X, τ). Claramente, para toda $i \in I$

$$A_i \subseteq \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

por lo tanto

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

Tomando cerraduras y aplicando (c) se obtiene

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

que es lo que se quería.
$(d) \Rightarrow (b)$: Sea $(A_i)_I$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de (X, τ) y sea

$$A = \bigcap_{i\in I} A_i$$

Por (d),

$$\overline{X - A} = \bigcup_{i\in I} \overline{X - A_i}$$

pero

$$\overline{X - A_i} = X - A_i$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{i\in I} \overline{X - A_i} = \bigcup_{i\in I} X - A_i = X - A$$

O sea que $X - A$ es cerrado y A es abierto, como se quería probar.♦

Proposición 2.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau\,|_F \text{ , para toda } F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)\}$$

entonces τ' es una topología para X y es más fina que τ.

Demostración. Considérese el sumidero de inclusiones

$$S = (\iota_F : (E, \tau\,|_F) \hookrightarrow X)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)}$$

τ hace continua a cada inclusión y τ' es final. Por lo tanto

$$\tau \subseteq \tau'.♦$$

Proposición 2.5 *Sean (X, τ) un espacio topológico arbitrario y*

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau\,|_F \text{ , para toda } F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)\}$$

Entonces:
(a) (X, τ') está finitamente generado.
(b) *Si $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es continua y (W, ω) está finitamente generado, entonces*

$$f : (W, \omega) \to (X, \tau')$$

es continua.

Demostración de (a). (X,τ') está finitamente generado porque el sumidero

$$S = \left(\iota_F : (F, \tau'|_F) \hookrightarrow (X,\tau')\right)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)}$$

es final.

Demostración de (b). Sea $f : (W,\omega) \to (X,\tau)$ una función continua cuyo dominio (W,ω) está finitamente generado, entonces el sumidero de inclusiones

$$S = \left(\iota_F : (F, \omega|_F) \hookrightarrow (W,\omega)\right)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)}$$

es final. Por otro lado, debido a la continuidad de la función $f : (W,\omega) \to (X,\tau)$, para toda $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)$ resulta continua la restricción

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & (F,\omega|_F) & \to & \left(f(F), \tau\left|_{f(F)}\right.\right) \\ & w & \mapsto & f(w) \end{array}$$

Pero $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)$ implica $f(F) \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)$; entonces como consecuencia de la definición de τ', para todo $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)$ resulta continua la inclusión

$$(\iota)_{f(F)} : \left(f(F), \tau\left|_{f(F)}\right.\right) \to (X,\tau')$$

Entonces, puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd} (F,\omega|_F) \arrow[r, "\iota_F"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & (W,\omega) \arrow[d, "f"] \\ (f(F), \tau|_{f(F)}) \arrow[r, "\iota_{f(F)}"'] & (X,\tau') \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)$, resulta que la composición

$$(F,\omega|_F) \xrightarrow{\iota_F} (W,\omega) \xrightarrow{f} (X,\tau')$$

es continua, para todo $F \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)$. Esto implica, debido a la finalidad de ω respecto a $(\iota_F)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)}$ y a $(\omega|_F)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(W)}$, y al teorema 1.2, que

$$f : (W,\omega) \to (X,\tau')$$

es continua, como se quería demostar.♦

Como corolario de los dos últimos resultados se tiene que a un espacio topológico arbitrario (X,τ) se le puede dotar siempre de una nueva topología τ' que lo hace un espacio finitamente generado; este nuevo espacio (X,τ') es llamado ***espacio finitamente generado asociado a*** (X,τ).

Corolario 2.1 *La $\mathfrak{Top}$-clase de los espacios finitamente generados es la clase de objetos de una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$, la cual se denotará por $\underline{\mathbb{F}}$.*

2.4. Espacios compactamente generados.

Definición 2.7 *Un espacio topológico (X, τ) se dice que está* ***compactamente generado*** *si es final el sumidero de inclusiones del conjunto de subespacios compactos de (X, τ).*

Definición 2.8 ***Definición 2.9*** *Al conjunto de subespacios compactos de (X, τ) se le denotará como $\mathsf{Pot}_K(X, \tau)$; es decir:*

$$\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X, \tau) := \{C \subseteq X : C \text{ es compacto}\}$$

Proposición 2.6 *Si (X, τ) es cualquier espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X, τ) está compactamente generado.
(b) $U \in \tau$ si, y solamente si, $U \cap C \in \tau|_C$, para toda $C \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X, \tau)$.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Por (a), es final el sumidero

$$(\iota_C : (C, \tau|_C) \hookrightarrow (X, \tau))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)}$$

Por lo tanto, para toda $C \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X, \tau)$, $U \in \tau$ si, y solamente si, $\iota_C^{-1}(U) \in \tau|_C$; es decir, para toda $C \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X, \tau)$,

$$U \in \tau \text{ si, y solamente si, } U \cap C \in \tau|_C$$

$(b) \Rightarrow (a)$: De acuerdo a la definición de sumidero final, (b) significa que τ es la topología final corespondiente a $(\iota_C)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)}$ y $(\tau|_C)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)}$. Por lo tanto, el sumidero

$$(\iota_C : (C, \tau|_C) \hookrightarrow (X, \tau))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)}$$

es final y (X, τ) está compactamente generado.⧫

Ejemplo 2.5 *Todo espacio finitamente generado está compactamente generado.*

En efecto, sean (X, τ) un espacio topológico finitamente generado y $U \subseteq X$ tal que, para toda $C \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X, \tau)$, $U \cap C \in \tau|_C$. En particular, dado que cualquier subespacio finito de (X, τ) es compacto, se tiene que para toda $E \in \mathsf{Pot}_F(X)$, $U \cap E \in \tau|_E$. Por tanto, $U \in \tau$ y, por la proposición anterior, (X, τ) está compactamente generado.⧫

Proposición 2.7 *Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau_{\varkappa} = \{U \subseteq X : U \cap C \in \tau|_C \text{, para toda } C \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X, \tau)\}$$

entonces $\tau_{\varkappa}$ es una topología para X más fina que τ.

Demostración. Considérese el sumidero de inclusiones

$$S = (\iota_C : (C, \tau|_C) \hookrightarrow X)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)}$$

τ hace continua a cada inclusión y $\tau_\varkappa$ es final. Por lo tanto

$$\tau \subseteq \tau_\varkappa.\blacklozenge$$

Corolario 2.2 *Si (X,τ) es cualquier espacio topológico y $\tau_\varkappa$ es la topología para X de la proposición anterior, entonces $(C, \tau|_C)$ es compacto en (X,τ) si, y sólo si, $(C, \tau_\varkappa|_C)$ es compacto en $(X, \tau_\varkappa)$.*

Demostración. Si $(C, \tau|_C)$ es compacto en (X,τ) y $(U_j)_J \subseteq \tau_\varkappa$ es una cubierta de C; entonces, de acuerdo con la definición de $\tau_\varkappa$, para toda $j \in J$ se tiene que

$$U_j \cap C \in \tau|_C$$

En consecuencia, para toda $j \in J$ existe $V_j \in \tau$ tal que

$$V_j \cap C = U_j \cap C$$

Entonces

$$C = \bigcup_{j\in J} (U_j \cap C) = \bigcup_{j\in J} (V_j \cap C)$$

Esto implica que $(V_j)_J$ es una cubierta abierta de C según τ y, por consiguiente, puede extraerse de ella una subcubierta finita $(V_j)_{J_0}$ de $(V_j)_J$. Pero entonces

$$C = \left(\bigcup_{j\in J_0} V_j\right) \cap C = \bigcup_{j\in J_0} (V_j \cap C) = \bigcup_{j\in J_0} (U_j \cap C)$$

lo cual significa que $(U_j)_{J_0}$ es una subcubierta fnita de $(U_j)_J$. Por lo tanto $(C, \tau_\varkappa|_C)$ es compacto en $(X, \tau_\varkappa)$.
Recíprocamente, puesto que por la proposición anterior $\varkappa$ es más fina que τ, se tiene que

$$1_X : (X, \tau_\varkappa) \to (X, \tau);$$

es continua; por lo tanto cualquier compacto C de $(X, \tau_\varkappa)$ es aplicado por 1_X en un compacto de (X,τ), pero ese compacto es C; por lo que C es compacto en (X,τ).$\blacklozenge$

Proposición 2.8 *Sea (X,τ) cualquier espacio topológico. Si $\tau_\varkappa$ es la topología para X de la proposición 2.7, entonces:*
(a) $(X, \tau_\varkappa)$ está compactamente generado.
(b) Si $f : (W,\omega) \to (X,\tau)$ es cualquier función continua, donde (W,ω) está compactamente generado, entonces $f : (W,\omega) \to (X,\tau_\varkappa)$ es continua.

Demostración de (a). De acuerdo con la definición de $\tau_{\varkappa}$, es final el sumidero de inclusiones de los subespacios compactos de (X,τ), es decir:

$$\iota_C : ((C, \tau|_C) \hookrightarrow (X, \tau_{\varkappa}))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)}$$

es un sumidero final; por lo tanto $(X,\tau_{\varkappa})$ está compactamente generado, pues $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau) = \mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau_{\varkappa})$.

Demostración de (b). La prueba es análoga a la de la proposición 2.5 ♦

Obsérvese nuevamente la importancia de estos dos últimos resultados al asegurar que a un espacio topológico arbitrario (X,τ) se le puede dotar siempre de una nueva topología $\tau_{\varkappa}$ que lo haga un espacio compactamente generado, a este nuevo espacio $(X,\tau_{\varkappa})$ se le suele denotar por $\langle X \rangle$ y es llamado *el espacio compactamente generado asociado a* (X,τ).

Corolario 2.3 *La $\mathfrak{Top}$-clase de los espacios compactamente generados es la clase de objetos de una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$, la cual se denotá por $\underline{\mathbb{K}}$.*

Enseguida se verán algunos ejemplos de espacios que están compactamente generados.

Ejemplo 2.6 *Todo espacio topológico localmente compacto está compactamente generado.*

En efecto, sea $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$ con la propiedad anterior. Sea $U \subseteq X$ tal que para toda $C \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)$ se satisface que

$$U \cap C \in \tau|_C$$

Sea $x \in U$ y sea C_0 una vecindad compacta de x; entonces

$$x \in U \cap C_0 \in \tau|_{C_0}$$

Por tanto, existe alguna $V \in \tau$ para la cual

$$V \cap C_0 = U \cap C_0$$

Entonces

$$x \in U \cap C_0 = V \cap C_0 \subseteq U$$

y como tanto C_0 como V son vecindades de x, entonces $C_0 \cap V$ es una vecindad de x contenida en U; por tanto $U \in \tau$.♦

Teorema 2.4 *Sea (X,τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
a) (X,τ) está compactamente generado.
b) Si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es una función tal que $f|_C : C \to (Y,\sigma)$ es continua, para todo subespacio compacto C de (X,τ), entonces f es continua en (X,τ).

Demostración. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(C, \tau\mid_C) \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\iota_C"'] & (Y, \sigma) \\
(X, \tau) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

el cual muestra que τ es final respecto de $(\tau\mid_C, \iota_C)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{K}}(X,\tau)}$.♦

2.5. Subcategoría correflexiva inducida por una propiedad

Los dos ejemplos anteriores ilustran una técnica para generar subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ a partir de una propiedad dada, siempre que ésta se preserve bajo funciones continuas.

Los objetos de la subcategoría correflexiva $\mathbb{S}_\wp$ serán los elementos de la clase de espacios cuyas topologías sean finales respecto del sumidero de inclusiones de los subespacios que satisfacen la propiedad $\wp$. El correflejo de un espacio topológico (X, τ) será un espacio $(X, \tau_\wp)$ con el mismo conjunto subyacente X, estructurado por una topología $\tau_\wp$ que satisfaga las tres condiciones siguientes: Que sea más fina que la topología original (i.e. $\tau \subseteq \tau_\wp$), que al topologizar a X dé lugar a un $\mathbb{S}_\wp$-espacio (i.e. $(X, \tau_\wp) \in Ob(\mathbb{S}_\wp)$), y que sea la mínima que satisfaga estas dos condiciones.

A continuación se define y construye lo antes mencionado:

Definición 2.10 *Una* ***propiedad*** $\wp$ *es una clase de espacios topológicos, es decir,* $\wp \subseteq Ob(\mathfrak{Top})$.

Definición 2.11 *Se dice que un espacio topológico* (X, τ) ***tiene la propiedad*** $\wp$ *si y solamente si* $(X, \tau) \in \wp$.

Ahora se define a la familia de subespacios de un espacio dado que tienen la propiedad y a la topología que es coherente con cada uno de ellos, y que resulta ser una identificación bajo la proyección canónica.

Definición 2.12 *Dados, el espacio topológico* (X, τ) *y* $\wp \subseteq Ob(\mathfrak{Top})$ *una propiedad, se define:*

$$\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X, \tau) := \{P \subseteq X : (P, \tau\mid_P) \in \wp\}$$

y

$$\tau_\wp := \{U \subseteq X : P \cap U \in \tau\mid_P \text{, para toda } P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X, \tau)\}$$

Observación 2.4 *La coproyección canónica*

$$\begin{array}{rcccc} p: & \coprod\limits_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)} (P,\tau|_P) & \to & (X,\tau_\wp) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

es una identificación.

Al ser $(X,\tau_\wp)$ un espacio de identificación, $\tau|_P$ es final respecto de la proyección canónica y de la topología del coproducto y, por tanto, de cada una de las inclusiones $(P,\tau|_P) \hookrightarrow (X,\tau_\wp)$.

Es importante advertir que lo que se busca es que $(X,\tau_\wp) \in Ob(\mathbb{S}_\wp)$, para lo cual es necesario que $\tau_\wp$ sea final respecto del sumidero de inclusiones de los elementos de $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau_\wp)$. A continuación se verá que ambos conjuntos coinciden bajo ciertas restricciones.

Proposición 2.9 *Dada* $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)$ *se tiene que* $\tau|_P = \tau_\wp|_P$

Demostración. $(\subseteq)$ Es claro que $\tau \subseteq \tau_\wp$, y por tanto, $\tau|_P \subseteq \tau_\wp|_P$.
$(\supseteq)$ Sea $U \in \tau_\wp|_{P_0}$; entonces existe alguna $V \in \tau_\wp$ tal que:

$$V \cap P_0 = U$$

En consecuencia, para toda $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)$ se tiene que:

$$P \cap V \in \tau|_P \quad \text{y} \quad V \cap P_0 = U$$

de lo cual se sigue que:

$$V \cap P_0 \in \tau|_{P_0} \quad \text{y} \quad V \cap P_0 = U$$

Por lo tanto, $U \in \tau|_{P_0}$.♦

Definición 2.13 *Se dice que una propiedad* $\wp \subseteq Ob(\mathfrak{Top})$ ***se preserva bajo funciones continuas*** *si para todo espacio topológico* (X,τ) *y para toda* $f \in \mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$ *se tiene que:*

$$(X,\tau) \in \wp \text{ implica } \left(f(X), \sigma|_{f(X)}\right) \in \wp$$

Proposición 2.10 *Si* $\wp \subseteq Ob(\mathfrak{Top})$ *es una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, entonces* $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau) = \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau_\wp)$.

Demostración.$(\subseteq)$ Es inmediato, pues $\tau|_P = \tau_\wp|_P$.
$(\supseteq)$ Dado $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau_\wp)$, como $\tau \subseteq \tau_\wp$ se tiene que $1_P : (P,\tau_\wp|_P) \to (P,\tau|_P)$ es continua. Por tanto, como $(P,\tau_\wp|_P)$ satisface $\wp$, también $(P,\tau|_P)$ la satisface. Consecuentemente, $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)$.♦

Corolario 2.4 *Dados, un espacio topológico* (X,τ) *y* $\wp \subseteq Ob(\mathfrak{Top})$ *una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, entonces* $\tau_\wp$ *es final respecto del sumidero:*

$$(\iota_P : (P,\tau_\wp|_P) \to (X,\tau_\wp))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)}$$

Definición 2.14 *Dada $\wp \subseteq Ob\,(\mathfrak{Top})$ una propiedad, se define:*

$$\mathbb{S}_{\wp} := \left\{ (X,\tau) \in Ob\,(\mathfrak{Top}) : (\iota_P : (P, \tau\,|_P) \to (X,\tau))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)} \text{ es final} \right\}$$

Teorema 2.5 *Dada $\wp \subseteq Ob\,(\mathfrak{Top})$ una propiedad, si $\wp$ se preserva bajo funciones continuas, entonces $\mathbb{S}_{\wp}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. (i) Dados $(X,\tau) \in Ob\,(\mathbb{S}_{\wp})$ y un espacio topológico (Y,σ) tales que $(X,\tau) \overset{h}{\cong} (Y,\sigma)$, entonces $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}\,(X,\tau) \cong \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}\,(Y,\sigma)$ por ser $\wp$ una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, y además se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(P, \tau\,|_P) \arrow[r, "\iota_P"] \arrow[d, "\widetilde{h}"'] & (X,\tau) \arrow[d, "h"] \\
(h(P), \sigma\,|_{h(P)}) \arrow[r, "\kappa_{h(P)}"'] & (Y,\sigma)
\end{tikzcd}$$

del cual es inmediato que $(Y,\sigma) \in Ob\,(\mathbb{S}_{\wp})$; por lo tanto, $\mathbb{S}_{\wp}$ es una $\mathfrak{Top}$-clase.

(ii) Dado un espacio topológico (X,τ), se tiene que $(X,\tau_{\wp}) \in Ob\,(\mathbb{S}_{\wp})$ y además que $1_X : (X,\tau_{\wp}) \to (X,\tau)$ es una correflexión, pues dada cualquier $f \in \mathfrak{Top}\,((W,\omega),(X,\tau))$ con $(W,\omega) \in Ob\,(\mathbb{S}_{\wp})$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(P, \omega\,|_P) \arrow[r, "\iota_P"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & (W,\omega) \arrow[d, "f"] \\
(f(P), \tau\,|_{f(P)}) \arrow[r, "\kappa_{f(F)}"'] & (X,\tau_{\wp})
\end{tikzcd}$$

con $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}\,(W,\omega)$ y $\kappa_{f(P)}$, ι_P son las inclusiones canónicas. Como la restricción

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & P & \to & f\,(P) \\ & x & \mapsto & f\,(x) \end{array}$$

es continua, entonces $\left(f\,(P)\,,\tau\,|_{f(P)}\right) \in \wp$ y, por tanto, $f\,(P) \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}\,(X,\tau_{\wp})$. De aquí que $\kappa_{f(P)}$ sea continua y, como para toda $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}\,(W,\omega)$ se satisface que:

$$\kappa_{f(P)}\widetilde{f} = \iota_P f$$

y ω es final respecto de $(\omega\,|_P\,,\iota_P)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(W,\omega)}$ se tiene que $f \in \mathfrak{Top}\,((W,\omega),(X,\tau_{\wp}))$.♦

Corolario 2.5 $(X,\tau) \in Ob\,(\mathbb{S}_{\wp})$ *si y solamente si* $(X,\tau) \cong (X,\tau_{\wp})$.

Demostración. Todo $\mathbb{S}_{\wp}$-espacio es su propio correflector y $\mathbb{S}_{\wp}$ es cerrada bajo homeomorfismos.♦

Hasta el momento sólo se han asociado subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ a propiedades que se preservan bajo funciones continuas, pero observando que $\mathbb{S}_{\wp}$ se obtiene formando identificaciones de coproductos de espacios que satisfacen la propiedad $\wp$, se puede generalizar la técnica.

2.6. Caracterización de las subcategorías bicorreflexivas

Proposición 2.11 *Si $r : X \to Y$ es una retracción y $r = gf$, donde*

$$f : X \to Z \quad y \quad g : Z \to Y$$

son continuas, entonces g es una retracción.

Demostración. Como r es retracción existe una función continua $s : Y \to X$ tal que $rs = 1_Y$; puesto que $r = gf$, entonces

$$1_Y = rs = gfs$$

es decir, fs es un inverso derecho continuo de la función g. Luego g es retracción.⧫

Proposición 2.12 *Toda retracción inyectiva es homeomorfismo.*

Demostración. $r : X \to Y$ es una biyección continua con inversa continua $s : Y \to X$.⧫

Definición 2.15 *Se dice que una subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ de $\mathfrak{Top}$* ***está cerrada bajo la formación de retracciones (ó de identificaciones)*** *si el hecho de que $r : A \to B$ sea una retracción (ó una identificación) con $A \in Ob(\underline{\mathbf{A}})$ implica que $B \in Ob(\underline{\mathbf{A}})$.*

Lema 2.1 *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ está cerrada bajo la formación de retracciones.*

Demostración. Sean, un espacio topológico (X, τ), $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$, un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio (A, α) y $r : (A, \alpha) \to (X, \tau)$ una retracción.

Sea (X, τ') el correflector de (X, τ) en $\underline{\mathbf{A}}$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (A,\alpha) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r"'] & (X,\tau) \\ (X,\tau') \arrow[ur, "1_X"'] & \end{tikzcd}$$

Por las dos proposiciones anteriores, 1_X es una retracción inyectiva y, por tanto, es un homeomorfismo.⧫

Observación 2.5 *Nótese que*

$$\left\{(X, \tau) \in Ob(\mathfrak{Top}) : \tau = \mathsf{Pot}(X) \quad o \quad \tau = \{X, \emptyset\}\right\}$$

es una $\mathfrak{Top}$-clase que no es una clase de objetos para ninguna subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Proposición 2.13 *Dada una función continua y suprayectiva $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, existen un espacio topológico (Z,ρ) y un par de funciones continuas h y p que hacen conmutar el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (Y,\sigma) \\
(Z,\rho) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

con p una identificación y h biyectiva.

Demostración. Basta tomar $(Z,\rho)=(X/\sim_f,\widetilde{\tau})$ donde para cualesquiera puntos $x_1,x_2\in X$

$$x_1\sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

y $\widetilde{\tau}$ es la topología final para $X/\sim_f$ respecto (τ,p), siendo p la proyección canónica

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/\sim_f \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

y definir

$$h:(X/\sim_f,\widetilde{\tau})\to(Y,\sigma)$$

mediante $h[x]=f(x)$♦

Teorema 2.6 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Entonces:*
(a) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de identificaciones.
(b) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de coproductos.

Demostración. Sean, $(A_i,\alpha_i)_I\subseteq Ob(\underline{\mathbf{A}})$, un conjunto X y un sumidero $(f_i:A_i\to X)_I$. Si τ es final respecto a $(\alpha_i,f_i)_I$, se tiene que (X,τ) es homeomorfo al coproducto de $(A_i,\alpha_i)_I$, que es un espacio de identificación cuando $\sharp(I)=1$.

Sea (X,τ') el correflector de (X,τ).

Entonces, dado que para toda $i\in I$ se cumple que $1_X^{-1}f_i=f_i$, por la finalidad del sumidero

$$(f_i:(A_i,\alpha_i)\to(X,\tau))_I$$

1_X^{-1} es continua y, por lo tanto, 1_X es homeomorfismo.♦

Teorema 2.7 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ cuya clase de objetos tiene elementos no vacíos. Son equivalentes:*
a) $\underline{\mathbf{A}}$ es bicorreflexiva.
b) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de identificaciones y coproductos.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Es el teorema anterior.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $X = \varnothing$, entonces (X, τ) es un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio ya que es el coproducto de la familia vacía de $\underline{\mathbf{A}}$.

Supóngase X no vacío. Sea $\mathcal{S}$ la clase de funciones continuas con dominio un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio y codominio (X, τ), es decir:

$$\mathcal{S} = \left[\mathfrak{Top}\left((A, \alpha), (X, \tau)\right)\right]_{Ob(\underline{\mathbf{A}})}$$

Nótese que $\mathcal{S}$ es un episumidero (pues entre sus elementos están las funciones constantes).

Sea I una clase de índices tal que $\mathcal{S} = (f_i)_I$. Obsérvese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & (Z, \rho) \arrow[dl, "h"'] & \\
(X, \tau) & & (\coprod_{m \in I} A_m, \alpha) \arrow[ll, "f"'] \arrow[ul, "p"'] \\
 & (A_i, \alpha_i) \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "\iota_i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $(\iota_i)_I$ son las inclusiones canónicas en el "coproducto", α es la "topología" final respecto de (α_i, ι_i), f es la función continua que existe por la definición 1.7 y p y h son la "identificación" y la biyección que existen por la proposición2.13. En caso de ser (Z, ρ) un $\underline{A}$-espacio, se tendría que (Z, ρ) es un correflector de (X, τ) y h una correflección.

Se verá que (Z, ρ) es un $\underline{A}$-espacio.

Para cada $x \in X$ considérese un $\underline{A}$-espacio (A_x, α_x) no vacío tal que $f(A_x) = x$. Para cada $V \in \mathsf{Pot}(Z) - \rho$ considérese un $\underline{A}$-espacio (A_V, α_V) tal que $\iota_V^{-1}\left(p^{-1}(V)\right) \notin \alpha_V$; tal $\underline{A}$-espacio existe debido a la finalidad de ρ. Sea

$$K = X \sqcup (\mathsf{Pot}(Z) - \rho) \ ;$$

entonces

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{p}: & \coprod_{k \in K} (A_k, \alpha_k) & \to & (Z, \rho) \\ & a & \mapsto & p(a) \end{array}$$

es una identificación, ya que:

- al ser cada (A_x, α_x) un cofactor, $\widetilde{p}$ es suprayectiva
- al ser $\widetilde{p}$ una restricción de p y p "continua", $\widetilde{p}$ es continua
- si $V \notin \rho$, $\widetilde{p}^{-1}(V)$ no es abierto en $\coprod_{k \in K} (A_k, \alpha_k)$ porque $\iota_V^{-1}\left(\widetilde{p}^{-1}(V)\right) \notin \alpha_V$.♦

2.7. Descripción de la subcategoría bicorreflexiva generada

Observación 2.6 *Obsérvese que la intersección de subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, también es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

En efecto, dicha intersección es plena y repleta, y está cerrada bajo identificaciones y coproductos.

Esta observación y el hecho de que $\mathfrak{Top}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ justifica la siguiente definición.

Definición 2.16 ***La subcategoría correflexiva generada por*** $\underline{\mathbf{A}}$ *es la intersección de todas las subcategorías correflexivas que contienen a* $\underline{\mathbf{A}}$.

Lema 2.2 *Sean*

$$\left((A_i, \alpha_i) \overset{f_i}{\to} (A, \alpha)\right)_I \quad y \quad \left((X_i, \tau_i) \overset{g_i}{\to} (X, \tau)\right)_I$$

coproductos topológicos arbitrarios. Si para toda $i \in I$ existe una identificación

$$c_i : (A_i, \alpha_i) \to (X_i, \tau_i)$$

entonces existe una única función continua $c : (A, \alpha) \to (X, \tau)$ que para toda $i \in I$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A_i, \alpha_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "c_i"'] & (A, \alpha) \arrow[d] \\
(X_i, \tau_i) \arrow[r, "g_i"'] & (X, \tau)
\end{tikzcd}$$

y es una identificación.

Demostración. $(g_i c_i)_I$ es un sumidero, por lo que existe una función continua que hace conmutar el diagrama, por la definición 1.7.

Sean, un espacio topológico (Y, σ) y $h \in \mathfrak{Set}(X, Y)$ tal que hc es continua.

Entonces, para toda $i \in I$ se tiene que

$$hcf_i = (hg_i)\, c_i$$

es continua; y como cada c_i es una identificación y $(g_i)_I$ es un sumidero final, resulta que h es continua.

Por lo tanto, τ es final respecto de (α, c). Por lo tanto, c es una identificación.♦

Teorema 2.8 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ arbitraria. Entonces:*

$$\widetilde{\underline{\mathbf{A}}} := \{(X,\tau) \in Ob(\mathfrak{Top}) : (X,\tau) \text{ \textit{es una identificación de un coproducto de} } \underline{\mathbf{A}}\text{\textit{-espacios}}\}$$

es la clase de objetos de la subcategoría correflexiva generada por $\underline{\mathbf{A}}$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& (A_i,\alpha_i) \arrow[dr, "\iota_i"] & \\
(Y,\sigma) & & (\coprod\limits_{m\in I} A_m,\alpha) \arrow[dl, "c"] \\
& (X,\tau) \arrow[ul, "h"] &
\end{tikzcd}$$

donde $(A_i,\alpha_i)_I \subseteq \underline{\mathbf{A}}$, α es final respecto de (α_i,ι_i) y c es una identificación.

Entonces $(X,\tau) \in \underline{\mathbf{A}}$.

(a) Si h es homeomorfismo, entonces $(Y,\sigma) \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ pues hc es una identificación. Por tanto $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es una $\mathfrak{Top}$-clase.

(b) Si h es una identificación, entonces $(Y,\sigma) \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ pues hc es una identificación. Por tanto $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es cerrada bajo identificaciones.

(c) Sea $I \times J$ una familia de índices y sea $\left(A_{(i,j)},\alpha_{(i,j)}\right)_{I\times J} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$. Considérese el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& (\coprod\limits_{k\in J} A_{(i,k)},\alpha_i) \arrow[r, "c_i"] \arrow[dd, "\kappa_i"] & (X_i,\tau_i) \arrow[dd, "\iota_i"] \\
(A_{(i,j)},\alpha_{(i,j)}) \arrow[ur, "\iota_{(i,j)}"] \arrow[dr, "\iota_{(i,j)}"'] & & \\
& (\coprod\limits_{I\times J} A_{(i,j)},\alpha_{(i,j)}) \arrow[r, "c"] & (\coprod\limits_{m\in I} X_m,\tau)
\end{tikzcd}$$

donde α_i es la topología final para $\coprod\limits_{k\in J} A_{(i,k)}$ respecto de las inclusiones $\iota_{(i,j)}$, τ_i son las topologías finales para X_i respecto de los identificaciones c_i, τ es la topología final para $\coprod\limits_{m\in I} X_m$ respecto de las inclusiones ι_i, $\iota_{(i,j)}$ son las inclusiones canónicas del teorema 1.11 y donde las inclusiones κ_i existen por la definición 1.7. Entonces, c es la identificación que existe por el lema 2.2. Luego, $\left(\coprod_{m\in I} X_m, \tau\right)$ es identificación de un coproducto de $\underline{\mathbf{A}}$-espacios y, por lo tanto, $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ está cerrada bajo coproductos.

Esto prueba que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es una $\mathfrak{Top}$-clase con la siguiente propiedad: Al añadir todos los morfismos entre sus elementos, las identidades respectivas y la ley de composición, se obtiene una subcategoría bicorreflexiva que contiene a $\underline{\mathbf{A}}$ y que, por construcción, es mínima.♦

Se seguirá cometiendo un abuso de notación en la siguiente

Definición 2.17 *Se denota por $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ a la subcategoría correflexiva generada por $\underline{\mathbf{A}}$.*

Así, se tienen dos métodos para obtener subcategorías correflexivas a partir de propiedades determinadas.

Observación 2.7 *Para una propiedad $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ que se preserva bajo transformaciones continuas se tiene que ambos métodos generan la misma subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, es decir, $\mathbb{S}_\wp = \widetilde{\underline{\wp}}$.*

Observación 2.8 *Sea $\wp \subseteq Ob(\mathfrak{Top})$ la propiedad de ser finito y sea $\wp' \subseteq Ob(\mathfrak{Top})$ la propiedad de ser finitamente generado, entonces es claro que $\mathbb{S}_\wp = \mathbb{S}_{\wp'}$.*

En resumen, a toda $\mathfrak{Top}$-clase se le puede asociar una propiedad que se preserva bajo homeomorfismo, a saber, ella misma; ésta, a su vez, nos define una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, a saber, su generada, pero no necesariamente es la única que lo hace.

2.8. La “retícula” de subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$

Al estar cerradas bajo intersecciones y ordenadas por la contención, resulta que las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ forman una “retícula”, cuyo elemento 0 es $\underline{\{\emptyset\}}$ y cuyo elemento 1 es $\mathfrak{Top}$.

Se muestran a continuación algunos ejemplos más de subcategorías correflexivas y se dan los primeros elementos de la “retícula”.

Ejemplo 2.7 *Como un primer ejemplo de subcategoría correflexiva generada, se tiene a la generada por la subcategoría vacía $\underline{\emptyset}$. Puesto que $\underline{\{\emptyset\}}$ es la subcategoría correflexiva más chica de $\mathfrak{Top}$, y puesto $\underline{\emptyset} \subseteq \underline{\{\emptyset\}}$, resulta que*

$$\widetilde{\underline{\emptyset}} = \underline{\{\emptyset\}}$$

Ejemplo 2.8 *La subcategoría $\underline{\mathbb{D}}$, cuyos objetos son los espacios discretos es la subcategoría bicorreflexiva generada por la $\mathfrak{Top}$-clase de los espacios singulares.*

En efecto, sea

$$\underline{A}_m = \left\{ (X_\lambda, \tau_\lambda) \in Ob\,(\mathfrak{Top}) : X_\lambda = \{x_\lambda\} \quad \text{o} \quad X_\lambda = \emptyset, \text{ con } \lambda \in \Lambda \right\}$$

siendo Λ cierta clase de índices.

Sea $(X_i, \tau_i)_I \subseteq \underline{A}_m$ y considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(X_i, \tau_i) \arrow[dr, "\iota_i"] & \\
& \left(\coprod\limits_{k \in I} X_k, \tau\right) \arrow[dl, "c"] \\
(X, \tau') &
\end{tikzcd}$$

Como las flechas del sumidero $(\iota_i)_I$ siempre son continuas, τ es discreta. Como τ es discreta, si c es una identificación, entonces τ' es discreta. Por tanto, $\widetilde{\underline{A}_m} \subseteq \underline{\mathbb{D}}$; y como $\underline{\mathbb{D}}$ es la mínima subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$, se tiene que $\widetilde{\underline{A}_m} = \underline{\mathbb{D}}$.♦

Ejemplo 2.9 *Sea $\underline{\mathbb{I}_2}$ la $\mathfrak{Top}$-clase cuyos elementos son todos los espacios indiscretos con dos puntos, y sea $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}$ la subcategoría plena y repleta de $\mathfrak{Top}$ cuya clase de objetos son todos los espacios topológicos cuyos conjuntos abiertos son cerrados. Entonces, $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ tal que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} = \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$.*

En efecto: (a) Sea $(A, \alpha) \in Ob\left(\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}\right)$; entonces existe una clase $(X_i, \tau_i)_I \subseteq \underline{\mathbb{I}_2}$ y una identificación:

$$p : \coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i) \to (A, \alpha)$$

Sea $U \in \alpha$; entonces, para toda $i \in I$:

$$p^{-1}(U) \cap X_i = \emptyset \quad \text{o} \quad p^{-1}(U) \cap X_i = X_i$$

De aquí que, para toda $i \in I$:

$$p^{-1}(A - U) = X_i \quad \text{o} \quad p^{-1}(A - U) = \emptyset$$

Por lo tanto, $A - U \in \alpha$, de lo cual se concluye que $(A, \alpha) \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}$ y, por lo tanto, $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}} \subseteq \mathbb{I}_{\mathbb{L}}$.

(b) Sea (X, τ) un $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}$-espacio. Defínase, para cada $x \in X$:

$$B_x := \cap \{U \in \tau : x \in U\}$$

Nótese que para toda $x \in X$ se tiene que

$$B_x \in \tau \quad \text{y} \quad \tau \mid B_x = \{B_x, \emptyset\}$$

y que para cualesquiera $x, y \in X$

$$B_x \cap B_y = \emptyset \quad \text{o} \quad B_x = B_y$$

Por tanto:

$$(X, \tau) \cong \coprod_{i \in I} (B_{x_i}, \tau \mid B_{x_i})$$

donde $(x_i)_I$ es un conjunto de representantes de las componentes indiscretas.

Entonces, para demostrar que $Ob\,(\mathbb{I}_{\mathbb{L}}) \subseteq Ob\left(\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}\right)$, basta expresar a cada B_{x_i} como una identificación de coproductos de $\underline{\mathbb{I}_2}$-espacios.

Si $\sharp\,(B_{x_i}) = 1$, considérese la constante.

De otro modo, defínase:

$$\complement_{B_{x_i}} := \left\{B \subseteq B_{x_i} : \sharp\,(B) = 2 \quad \text{y} \quad x_i \in B\right\}$$

y sea

$$p : \coprod_{B \in \complement_{B_{x_i}}} (B, \{B, \emptyset\}) \to (B_{x_i}, \tau \mid B_{x_i})$$

donde p es la *coproyección canónica*, es decir, coincide con la identidad en cada cofactor. Entonces p es suprayectiva y es continua.

Sea $V \subseteq B_{x_i}$ tal que $p^{-1}(V)$ es abierto; entonces, para toda $B \in \complement_{B_{x_i}}$, $p^{-1}(V)$ es abierto en B; y por tanto, para toda $B \in \complement_{B_{x_i}}$ se tiene alguna de las siguientes igualdades:

$$p^{-1}(V) = B \quad \text{o} \quad p^{-1}(V) = \emptyset$$

Distínganse dos casos, a saber:

Si $x_i \in V$ se tiene que para toda $B \in \complement_{B_{x_i}}$ se satisface que:

$$p^{-1}(V) \cap B = B$$

y por tanto $V = B_{x_i}$.

Si $x_i \notin V$ se tiene que para toda $B \in \complement_{B_{x_i}}$ se satisface que:

$$p^{-1}(V) \cap B = \emptyset$$

y por tanto $V = \emptyset$.

Consecuentemente, $V \in \tau \mid B_{x_i}$, de lo cual se sigue que p es una identificación.♦

$\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ es la subcategoría de los **espacios localmente indiscretos.** Este nombre obedece a que cada punto tiene una vecindad discreta..

Proposición 2.14 *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ distinta de $\underline{\mathbb{D}}$ tiene entre sus objetos a los espacios indiscretos de dos puntos.*

Demostración. Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ distinta de $\underline{\mathbb{D}}$. Sea $(2, \tau)$ el $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de $(2, \{\varnothing, 2\})$, donde $2 = \{0, 1\}$.

Sea (A, α) un $\underline{\mathbf{A}}$-espacio tal que α no es discreta. Entonces existe $B \subsetneq A$ tal que $B \notin \alpha$.

Considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(A,\alpha) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f_i"'] & (2,0,2) \\
(2,\tau) \arrow[ur, "1_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde para $i \in 2$ se define

$$f_i : A \to 2$$

mediante

$$f_i(a) = \begin{cases} i, \text{ si } a \in B \\ (i+1)_{\operatorname{mod} 2}, \text{ si } a \notin B \end{cases}$$

Para $i \in 2$, $f_i : (A, \alpha) \to (2, \{\varnothing, 2\})$ es continua, porque el codominio es indiscreto; por lo tanto, para $i \in 2$, $f_i : (A, \alpha) \to (2, \tau)$ es la única función continua que hace conmutar el diagrama.

Nótese que

$$f_i^{-1}\{i\} = B \notin \alpha$$

Por lo tanto, para $i \in 2$, $\{i\} \notin \tau$, de lo cual se sigue que $\tau = \{\varnothing, 2\}$.♦

Como consecuencia de la proposición anterior se puede asegurar que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ es la subcategoría bicorreflexiva inmediatamente superior a $\underline{\mathbb{D}}$ según el orden dado por la contención $\subseteq$ entre categorías plenas; esta situación entre $\underline{\mathbb{D}}$ e $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ quedará indicada escribiendo

$$\underline{\mathbb{D}} \sqsubset \underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}.$$

♦

Ejemplo 2.10 *Sea*

$$\Sigma := \left\{(X, \tau) \in Ob\,(\mathfrak{Top}) : \sharp\,(X) = 2 \quad y \quad \sharp\,(\tau) = 3\right\}$$

es decir, es la clase de los espacios topológicos homeomorfos al espacio de Sierpinski (i.e. $(\{0,1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\})$, que se puede escribir como $(2,3)$), debido a lo cual la denotaremos por $\underline{\Sigma}$.

Lema 2.3 *Dadas, $(X_i, \tau_i)_I \subseteq \underline{\Sigma}$, $\left(\coprod_{i \in I} X_i, \tau\right)$, donde τ es final con respecto al sumidero de inclusiones, y $U \in \tau$, si $x \in X_j$, $\{x\} \notin \tau_j$ y $x \in U$, entonces $U \cap X_j = X_j$.*

Demostración. Si $U \in \tau$, entonces para toda $i \in I$

$$U \cap X_i \in \tau_i$$

Por tanto, si $U \cap X_j \neq \emptyset$ y $\{x\} \notin \tau_j$, entonces $U \cap X_j = X_j$.♦

Recuérdese que $\underline{\mathbb{F}}$ denota a la subcategoría bicorreflexiva de los espacios finitamente generados, es decir, aquéllos para los que resulta final el sumidero de inclusiones de los subespacios finitos.

Proposición 2.15 $\widetilde{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbb{F}}$.

Demostración. ($\subseteq$) Por ser finito, el espacio de Sierpinski está finitamente generado, por lo que $\underline{\Sigma} \subseteq Ob(\underline{\mathbb{F}})$; consecuentemente, $\widetilde{\underline{\Sigma}} \subseteq \underline{\mathbb{F}}$.

($\supseteq$) (a) Primeramente se verá que todo espacio finito (F, φ) es identificación de un coproducto de $\underline{\Sigma}$-espacios, para lo cual se aplicará inducción sobre el número cardinal de F.

Si $\sharp(F) = 0$, entonces el coproducto de la familia vacía de $\underline{\Sigma}$-espacios es (F, φ), con $\varphi = \{\varnothing\}$.

Si $\sharp(F) = 1$, entonces la constante desde $(2,3)$ a F es una identificación.

Supóngase que (F, φ) es identificación de un coproducto de $\underline{\Sigma}$-espacios, cuando $\sharp(F) = k$.

Sean, F un conjunto cuyo número cardinal es $k+1$, $\varphi \in \mathfrak{Top}[F]$, $x \in F$ y $W = \cap\{U \in \varphi : x \in U\}$. Entonces, W es abierto y

$$\sharp(F - \{x\}) = k$$

Distínganse dos casos:

(i) $W = \{x\}$. Sea $y \in \cap\{U \in \varphi : W \subsetneq U\}$ y defínase

$$c : \left(F - \{x\}, \varphi|_{F-\{x\}}\right) \coprod (2,3) \to (F, \varphi)$$

mediante

$$c|_{F-\{x\}} = 1_{F-\{x\}}, \quad c(0) = x, \quad c(1) = y$$

Entonces c es una identificación y, por lo tanto, (F, φ) es un $\widetilde{\underline{\Sigma}}$-espacio.

(ii) $W \neq \{x\}$; sean, $y \in W - \{x\}$ y

$$c : \left(F - \{x\}, \varphi|_{F-\{x\}}\right) \coprod (2,3) \coprod (2', 3') \to (F, \varphi)$$

dada por

$$c|_{F-\{x,y\}} = 1_{F-\{x,y\}}, \quad c(0) = c(1') = x, \quad c(1) = c(0') = y$$

entonces c es una identificación y, por lo tanto, (F, φ) es un $\widetilde{\underline{\Sigma}}$-espacio.

(b) Ahora se verá que todo $\underline{\mathbb{F}}$-espacio es identificación de un coproducto de una familia de espacios finitos.

Sea (X,τ) un $\underline{\mathbb{F}}$-espacio; entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(F,\tau\mid_F) \arrow[r, "\iota_F"] \arrow[d, "\iota'_F"'] & (X,\tau) \arrow[d, "1_X"] \\
(\coprod_{F\in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}\mathsf{X}} F,\phi) \arrow[r, "c"'] & (X,\tau')
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{array}{rccc} c: & \coprod_{F\in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)} (F,\tau\mid_F) & \to & (X,\tau') \\ & (x,F) & \mapsto & x \end{array}$$

y τ' es final para X respecto a c y a la topología de $\coprod_{F\in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{F}}(X)} (F,\tau\mid_F)$. Puesto que cada $\underline{\mathbb{F}}$-espacio es su propio correflector, $(X,\tau)\cong(X,\tau')$.

$$\therefore \underline{\mathbb{F}}\subseteq\widetilde{\underline{\Sigma}}$$

Entonces queda probado que

$$\widetilde{\underline{\Sigma}}=\underline{\mathbb{F}}$$

♦

Proposición 2.16 *Todo espacio localmente indiscreto está finitamente generado, pero no recíprocamente.*

Demostración. Es claro que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}\subseteq\underline{\mathbb{F}}$. Para mostrar que lo recíproco es falso, basta pensar en el espacio de Sierpinski que está finitamente generado pero que, claramente, no es localmente indiscreto.♦

Proposición 2.17 *Toda subcategoría bicorreflexiva que contenga propiamente a $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ tiene entre sus objetos al espacio de Sierpinski.*

Demostración. Si $\underline{A}$ es una subcategoría bicorreflexiva que contiene propiamente a $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$, entonces existen un $\underline{A}$-espacio A y un abierto $U\subseteq A$ que no es cerrado. Sea

$$p_U : A\to\{0,1\}$$

dada por

$$p_U(a)=\begin{cases}0, \text{ si } a\in U\\ 1, \text{ si } a\notin U\end{cases}$$

Por lo tanto, la identificación inducido por p_U es el espacio de Sierpinski.♦

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores se tiene el siguiente

Corolario 2.6 $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}}$. ♦

Los resultados anteriores pueden sintetizarse escribiendo

$$\underline{\{\varnothing\}} \sqsubset \underline{\mathbb{D}} \sqsubset \underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}} \subset \underline{\mathbb{K}}$$

Una descripción casi completa de la "retícula" de las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ puede encontrarse en [5].

Capítulo 3

Bicorreflexividad y clases de funciones

En el capítulo anterior se mostraron dos métodos para obtener subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, y se mostró a su vez que la única que no es bicorreflexiva es $\{\emptyset\}$. Horst Herrlich menciona en un artículo [5] que el primer método es demasiado particular para obtener por medio de él a todas las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ y desarrolla un método, por medio de operadores límite, para obtenerlas todas, además de establecer una biyección entre las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ y los operadores límite idempotentes.

Graciela Salicrup y Roberto Vázquez muestran en su artículo [1] otra forma de obtener a todas las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, de esto trata el presente capítulo.

Iniciamos con el concepto de producto fibrado.

3.1. Producto fibrado en $\mathfrak{Top}$

Definición 3.1 *Un cuadrado conmutativo de funciones continuas:*

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\ X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"'] & & A \\ & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$$

se llama ***cuadrado cartesiano*** *si, dadas cualesquiera dos funciones continuas*

$$a_i : W \to A_i,\ i \in \{0, 1\}$$

tales que

$$g_0 a_0 = g_1 a_1$$

exista una única función continua

$$f : W \to X$$

tal que:

$$\begin{tikzcd}
 & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
W \arrow[r, "f"] \arrow[urr, "a_0"] \arrow[drr, "a_1"'] & X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"'] & & A \\
 & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

En tal caso se hablará de la fuente:

$$f_i : X \to A_i,\ i \in \{0, 1\}$$

como de un ***producto fibrado del sumidero:***

$$g_i : A_i \to A,\ i \in \{0, 1\}$$

en $\mathfrak{Top}$ *y se dirá que la pareja de funciones* $(f_i)_{i\in\{0,1\}}$ *tiene la* ***propiedad universal del producto fibrado****.*

Observación 3.1 *Todo producto fibrado es una monofuente.*[1]

En efecto, obsérvese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
W \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[urr, "a_0"] \arrow[drr, "a_1"'] & X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"'] & & A \\
 & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $(f_i)_{i\in\{0,1\}}$es un producto fibrado de $(g_i)_{i\in\{0,1\}}$. Entonces, por la propiedad universal del producto fibrado, $f = h$.⧫

[1]Véase la definición .

Descripción del producto fibrado en $\mathfrak{Top}$.

Proposición 3.1 *En $\mathfrak{Top}$ cualesquiera dos funciones de codominio común tienen un producto fibrado.*

Demostración. Sea $(g_i : A_i \to A)_{i\in\{0,1\}}$ un sumidero de funciones continuas y sea:

$$X = \left\{ x \in \prod_{i\in 2} A_i : g_0\left(p_0\left(x\right)\right) = g_1\left(p_1\left(x\right)\right) \right\}$$

Sean $W \in \mathfrak{Top}$ y a_0, a_1 dos funciones continuas tales que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
W \arrow[urr, "a_0"] \arrow[drr, "a_1"'] & X \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & & A \\
 & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod_{j\in 2} A_j \\
A_i \arrow[ur, "a_i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde f existe y es única por la propiedad universal del producto topológico.

Dado $w \in W$, $g_0 a_0\left(w\right) = g_1 a_1\left(w\right)$; por lo tanto, $f\left(W\right) \subseteq X$ y conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
W \arrow[urr, "a_0"] \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "a_1"'] & X \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & & A \\
 & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Por abuso del lenguaje, se dice que X es el **producto fibrado de la pareja** $\left(g_i\right)_{i\in\{0,1\}}$.♦

Observación 3.2 *El producto fibrado también puede ser definido en* $\mathfrak{Set}$.

Proposición 3.2 *El producto fibrado es único salvo homeomorfismo.*

Demostración. Dado el $\mathfrak{Top}$-sumidero

$$(f_i : A_i \to A)_{i\in\{0,1\}}$$

sean

$$(g_i : X \to A_i)_{i\in\{0,1\}} \quad , \quad (h_i : Y \to A_i)_{i\in\{0,1\}}$$

productos fibrados de $(f_i)_{i\in\{0,1\}}$; entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& & A_0 \arrow[dr, "f_0"] & \\
W \arrow[urr, "g_0"] \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[drr, "g_1"'] & Y \arrow[l, shift left, "H"] \arrow[ur, "h_0"] \arrow[dr, "h_1"'] & & A \\
& & A_1 \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

donde G y H existen y son únicas por la propiedad universal del producto fibrado. En consecuencia para todo $i \in \{0,1\}$

$$g_i HG = g_i 1_X \quad \text{y} \quad h_i GH = h_i 1_Y$$

Además, como $(g_i)_{i\in\{0,1\}}$, $(h_i)_{i\in\{0,1\}}$ son monofuentes:

$$HG = 1_X \quad \text{y} \quad GH = 1_Y$$

Por lo tanto, $X \cong Y$.♦

Proposición 3.3 *Si*

$$(f_i : X \to A_i)_{i\in\{0,1\}}$$

es un producto fibrado de $(g_i : A_i \to A)_{i\in\{0,1\}}$ *y* $h : W \to X$ *es un homeomorfismo, entonces* $(f_i h)_{i\in\{0,1\}}$ *es un producto fibrado de* $(g_i)_{i\in\{0,1\}}$.

Demostración. Sean, un espacio topológico V y para toda $i \in \{0,1\}$, $v_i \in \mathfrak{Top}\,(V, A_i)_{i\in\{0,1\}}$ tales que hacen conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
V \arrow[urrr, "v_0"] \arrow[drrr, "v_1"'] & W \arrow[r, "h"] & X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"'] & & A \\
 & & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una única $f : V \to X$ tal que para toda $i \in \{0,1\}$:

$$f_i f = v_i$$

Entonces para toda $i \in \{0,1\}$:

$$(f_i h)\left(h^{-1} f\right) = v_i$$

donde $h^{-1}f$ es única, por la unicidad de f. Por lo tanto, $(f_i h)_{i\in\{0,1\}}$ es un producto fibrado de $(g_i)_{i\in\{0,1\}}$♦.

Ahora se puede definir a un tipo especial de clases de funciones que servirá para construir subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$.

3.2. Definición de *0-clase* y de *1-clase*

Definición 3.2 *Una 0-clase es cualquier clase de funciones continuas y suprayectivas.*

Definición 3.3 *Una 0-clase M se llama 1-clase si para todo cuadrado cartesiano en* $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f"] & \\
X' \arrow[ur] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\
 & Y' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

, el hecho de tener f en M implica que g pertenece a M.

Ejemplos de 1-clases.

Ejemplo 3.1 *La 0-clase máxima:*

$$M_{máx} := \{f \in Mor\,(\mathfrak{Top}) : f \text{ es suprayectiva}\}$$

es 1-clase y, por lo tanto, es la 1-clase máxima.

Demostración. Considérese el siguiente cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[dr, "f_1"] & \\ X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & & A \\ & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$$

Si $g_0 \in M_{máx}$ y $a_1 \in A_1$, entonces existe $a_0 \in A_0$ tal que $g_0(a_0) = g_1(a_1)$.
Para $i \in \{0,1\}$ sea

$$\begin{array}{rccc} w_i : & \{\varnothing\} & \to & A_i \\ & \varnothing & \mapsto & a_i \end{array}$$

Entonces existe $f : \{\varnothing\} \to X$ tal que, para $i \in \{0,1\}$, $f_i f = w_i$. Por lo tanto, $f_1 f\,(\varnothing) = a_1$. Por lo tanto, $f_1 \in M_{máx}$♦

Observación 3.3 *La unión de 0-clases es una 0-clase.*

Lema 3.1 *La intersección de 1-clases es 1-clase.*

Demostración. Sea J una clase y para toda $j \in J$ sea M_j una *1-clase;* considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[dr, "f_1"] & \\ X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & & A \\ & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$$

Si es un cuadrado cartesiano y $g_0 \in \bigcap\limits_{j\in J} M_j$, entonces para toda $j \in J$, $f_1 \in M_j$ y, consecuentemente, $f_1 \in \bigcap\limits_{j\in J} M_j$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{j\in J} M_j$ es una *1-clase.*♦

3.3. *1-clase* generada por una *0-clase* M

Definición 3.4 *$\widetilde{M}$ denotará a la intersección de todas las 1-clases que contienen a una 0-clase arbitraria M y se hablará de $\widetilde{M}$ como de la 1-clase generada por la 0-clase M.*

Definición 3.5 *Dada M una 0-clase, sea M' la clase de funciones f' tales que existe un cuadrado cartesiano:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ X' \arrow[ur] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\ & Y' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

con $f \in M$.

Lema 3.2 *M' es 1-clase y $M' = \widetilde{M}$.*

Demostración: (i) Supóngase que se tiene el siguiente cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ X' \arrow[ur, "a'"] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\ & Y' \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

con $f \in M'$. Entonces existe un cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "b'"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

con $g \in M$. Entonces, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "b'a'"] \arrow[dr, "f'"'] & & Z \\
& Y' \arrow[ur, "ba"'] &
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano y, por lo tanto, $f' \in M'$. Consecuentemente, M' es una *1-clase.*

(ii) Sea N una *1-clase* tal que $M \subseteq N$ y sea $f' \in M'$. Entonces existe un cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "f"] & \\
X' \arrow[ur] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\
& Y' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

con $f \in M$. Entonces, $f' \in N$ y, por tanto, $M' \subseteq N$. Consecuentemente, $M' \subseteq \widetilde{M}$.

(iii) Dada $f \in M$, es claro que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \\
& Y \arrow[ur, "1_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano. Por lo tanto, $M \subseteq M'$. Por lo tanto, $\widetilde{M} \subseteq M'$.⧫

3.4. $\mathfrak{Top}$-clase asociada a una *0-clase*

Definición 3.6 *Sea M una 0-clase; se define:*

$$A(M) := \{A \in Ob(\mathfrak{Top}) : \textit{para toda } f \in M, \textit{ si } cod(f) = A \textit{ entonces } f \textit{ es identificación}\}$$

es decir, $A(M)$ consta de los espacios topológicos que nunca son codominio de algún elemento de M, o bien, de los que cada vez que aparecen como codominio de alguna función de M, dicha función es una identificación.

Observación 3.4 *Para cualquier 0-clase M se tiene que $A(M)$ contiene a los espacios singulares. Por lo tanto, no toda propiedad está asociada a una 0-clase.*

Proposición 3.4 *Si M es una 1-clase, entonces $A(M)$ es una $\mathfrak{Top}$-clase.*

Demostración. Sean, A un $A(M)$-espacio, $A \overset{h}{\cong} B$ y $f \in M$ tal que $cod(f) = B$.
Considérese el siguiente cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[ur, "h'"] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\
& A \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $f \in M$, entonces $f' \in M$, por lo que f' es una identificación.

Sean, C un espacio topológico y $g \in \mathfrak{Set}(B, C)$ tal que gf es continua; entonces, gfh' es continua y, por lo tanto, ghf'es continua. Por lo tanto, g es continua, de lo cual se sigue que g es una identificación.♦

Entonces, se puede pensar que cada *1-clase* describe una propiedad topológica; de hecho, se puede decir todavía más, como se verá más adelante.

Observación 3.5 *En general, no es cierto que $A(M)$ es una $\mathfrak{Top}$-clase, pero si lo es, se indicará escribiendo $\underline{\mathbf{A}}(M)$.*

Ejemplos de $\mathfrak{Top}$-clases asociadas a ***0-clases***.

Ejemplo 3.2 *Si M es la clase de todos los homeomorfismos, entonces dado cualquier espacio topológico A y dado cualquier homeomorfismo $f : X \to A$ se tiene que f es una identificación. Por lo tanto $\underline{\mathbf{A}}(M) = Ob(\mathfrak{Top})$.*

Ejemplo 3.3 *Si M es la clase de todas las retracciones, entonces M es una 0-clase y para todo espacio topológico A, cualquier retracción $r : X \to A$ es una identificación. Es decir, $\underline{\mathbf{A}}(M) = Ob(\mathfrak{Top})$.*

Ejemplo 3.4 *Sea $\underline{A}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y sea M la clase de todas las $\underline{A}$-correflexiones; entonces $\underline{\mathbf{A}}(M) = Ob(\underline{A})$.*

En efecto, sea X un espacio topológico; entonces

$$X \in \underline{\mathbf{A}}(M) \text{ implica } X \in Ob\,(\underline{A})$$

porque $\underline{A}$ es cerrada bajo identificaciones.

Recíprocamente

$$X \in Ob\,(\underline{A}) \text{ implica } X \in \underline{\mathbf{A}}(M)$$

porque toda $\underline{A}$-correflexión de un $\underline{A}$-espacio es un homeomorfismo.

Ejemplo 3.5 *Si $M = \emptyset$ entonces es una colección de funciones continuas y suprayectivas y además:*

$$A\,(\emptyset) = \{A \in Ob\,(\mathfrak{Top}) : \textit{para toda } f,\ \textit{si } f \in \emptyset \textit{ y } cod\,(f) = A \textit{ entonces } f \textit{ es identificación}\}$$

Puesto que es falso que $f \in \emptyset$, se tiene que todo espacio topológico A satisface la condición de pertenencia a $A\,(\emptyset)$. Por lo tanto M es una 0-clase tal que $\underline{\mathbf{A}}(M) = Ob\,(\mathfrak{Top})$.

Observación 3.6 *Obsérvese que si M y M' son 0-clases tales que $M \subseteq M'$ entonces $A(M') \subseteq A(M)$.*

En efecto, si $A \in A(M')$ y $f : X \to A$ es un miembro de M, entonces $f \in M'$ y por lo tanto f es una identificación. Por lo tanto $A \in A(M)$.

Lema 3.3 *Sea I una clase y para toda $i \in I$ sea M_i una 0-clase; entonces se tiene que*

$$A\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \bigcap\nolimits_{i\in I} A\,(M_i)$$

Demostración. ($\subseteq$) *Para toda $i \in I$,*

$$M_i \subseteq \bigcup_{m\in I} M_m$$

por tanto, para toda $i \in I$,

$$A\left(\bigcup_{m\in I} M_m\right) \subseteq A\,(M_i)$$

de lo cual se sigue que

$$A\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \subseteq \bigcap\nolimits_{i\in I} A\,(M_i)$$

($\supseteq$) *Supóngase que $B \in \bigcap_{i\in I} A\,(M_i)$; entonces, para toda $i \in I$, si:*

$$f \in M_i \quad y \quad cod\,(f) = B$$

entonces f es una identificación. Por tanto, si:

$$f \in \bigcup_{i\in I} M_i \quad y \quad cod\,(f) = B$$

entonces f es una identificación. Por consiguiente:

$$B \in A\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \quad \blacklozenge$$

Lema 3.4 *Siendo J un conjunto de índices arbitrario, si $(B_j)_J$ es una partición de un conjunto Y y $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces siendo $A_j = f^{-1}(B_j)$, $j \in J$, se tendrá que $(A_j)_J$ es una partición de X.*

Demostración. Se tiene que

$$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = f^{-1}(Y) = X$$

Debido a la suprayectividad de f tenemos que para cualquier $j \in J$ y cualquier $b \in B_j$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = b$. Por lo tanto, $A_j \neq \varnothing$, para toda $j \in J$. Finalmente, si para $j, k \in J$ se tiene que $x \in A_j \cap A_k$, entonces $x \in [f^{-1}(B_j) \cap f^{-1}(B_k)] = f^{-1}(B_j \cap B_k)$. Por lo tanto $f(x) \in B_j \cap B_k$. Por lo tanto, $B_j = B_k$ y $A_j = A_k$. Esto prueba que $(A_j)_J$ es una partición de X.♦

Proposición 3.5 *Dado un conjunto de espacios topológicos no vacíos y ajenos dos a dos $(A_j, \alpha_j)_J$ y una función continua y suprayectiva*

$$f : (X, \tau) \to \coprod_{j\in J} (A_j, \alpha_j)$$

entonces, siendo $X_j = f^{-1}(A_j)$ y $\tau_j = \tau|_{X_j}$, se tiene que $(X, \tau) = \coprod_{j\in J} (X_j, \tau_j)$.

Demostración. Por el lema anterior, $X = \coprod_{j\in J} X_j$. Además, para toda $j \in J$:

$$X_j = f^{-1}(A_j) \in \tau$$

Por lo tanto, $(X, \tau) = \coprod_{j\in J} (X_j, \tau_j)$, con $\tau_j = \tau \mid_{X_j}$.♦

Ahora se cuenta con todos los elementos que permiten mostrar la relación existente entre las *1-clases* y las subcategorías bicorreflexivas.

3.5. *1-clases* y bicorreflexividad

Teorema 3.1 *Si M es una 1-clase, entonces $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ es la clase de objetos de una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. (a) Sea $(A_i, \alpha_i)_I$ una clase de $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$-espacios, y sea $f \in M$, con $f : (X, \tau) \to \coprod_{i\in I} (A_i, \alpha_i)$; defínase, para cada $i \in I$, $X_i := f^{-1}(A_i)$. Entonces:

$$(X, \tau) = \coprod_{i\in I} (X_i, \tau_i)$$

con $\tau_i = \tau\mid_{X_i}$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & (\coprod\limits_{m\in I} X_m, \tau_m) \arrow[dr, "f"] & \\ (X_i,\tau_i) \arrow[ur, "\kappa_i"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & & (\coprod\limits_{m\in I} A_m, \alpha_m) \\ & (A_i,\alpha_i) \arrow[ur, "\iota_i"'] & \end{tikzcd}$$

que para cada $i \in I$ es un cuadrado cartesiano. Entonces, para cada $i \in I$, es una M-flecha la restricción

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & (X_i,\tau_i) & \to & (A_i,\alpha_i) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

por ser M una *1-clase*, y como $A_i \in \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$, se tiene que $\widetilde{f}$ es una identificación. Por tanto, f es una identificación. Por tanto $\coprod\limits_{i\in I}(A_i,\alpha_i) \in \underline{\mathbf{A}}(M)$.

(b) Sean, (A,α) un $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$-espacio, $c:(A,\alpha)\to(X,\tau)$ una identificación y $f:(W,\omega)\to(X,\tau)$ una M-flecha. Se construye el producto fibrado (c',f') de (c,f):

$$\begin{tikzcd} & (W,\omega) \arrow[dr, "f"] & \\ (Y,\sigma) \arrow[ur, "c'"] \arrow[dr, "f'"'] & & (X,\tau) \\ & (A,\alpha) \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

f' es una identificación porque es una M-flecha de codominio en $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$; también c es una identificación; consecuentemente, también f es una identificación. Por lo tanto, $(X,\tau) \in \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$.

Al formar la subcategoría plena y repleta de $\mathfrak{Top}$ cuya clase de objetos es $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$, ésta resulta ser cerrada bajo coproductos e identificaciones, como se ha visto en (a) y (b); por lo tanto, es bicorreflexiva.⧫

Observación 3.7 *Como ha venido haciéndose, se abusará de la notación denotando a la subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$ *inducida por una 1-clase* M *por* $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$.

Proposición 3.6 *Si* $\underline{A}$ *es una subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$ *y* $\widetilde{M}$ *es la 1-clase generada por la clase de las* $\underline{A}$*-correflexiones, entonces* $\underline{A} = \underline{A}(\widetilde{M})$.

Demostración. Sea M la clase de las $\underline{A}$-correflexiones y sea $\widetilde{M}$ la *1-clase* generada por M. Puesto que $M \subseteq \widetilde{M}$, se tiene por la observación 3.6, que $\underline{A}(\widetilde{M}) \subseteq \underline{A}(M) = \underline{A}$. Ahora sea $A \in \underline{A}$ y sea $f : X \to A$ un elemento de $\widetilde{M}$. Más arriba, en el lema 3.2, quedaron descritos los elementos de la *1-clase* generada por una *0-clase* arbitraria; de ahí que para f exista un cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
& X' \arrow[dr, "f'"] & \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & A' \\
& A \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

donde f' es una $\underline{A}$-correflexión de A' es decir, $f' \in M$. Puesto que $A \in \underline{A}$, existe una única $g : A \to X'$ continua y tal que $f'g = v$. Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & X' \arrow[dr, "f'"] & \\
A \arrow[urr, "g"] \arrow[drr, "1_A"'] & X \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & A' \\
& & A \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Puesto que el cuadrado es cartesiano, existe una única $h : A \to X$ continua tal que $uh = g$ y $fh = 1_A$, entonces h es sección de f y por lo tanto f es una identificación. Esto prueba que $\underline{A} \subseteq \underline{A}(\widetilde{M})$, con lo que la proposición queda demostrada.♦

Corolario 3.1 *Para una 1-clase M arbitraria, si $\underline{A} = \underline{A}(M)$ y si M' es la clase de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}\,(M' \cup M)$.*

Demostración. En efecto:

$$\underline{A}\,(M' \cup M) = \underline{A}\,(M') \cap \underline{A}\,(M) = \underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}\ .\blacklozenge$$

Al estar cerradas bajo intersecciones y ordenadas por la contención, resulta que las *1-clases* forman una "retícula" cuyo elemento 0 es $\{\emptyset\}$ y cuyo elemento 1 es $M_{\text{máx}}$, que es la clase de todas las funciones continuas y suprayectivas.

Recuérdese que si M y N son un par de *1-clases* tales que $M \subseteq N$, entonces $\underline{A}(N) \subseteq \underline{A}(M)$.

Obsérvese la estrecha relación existente entre la "retícula" de las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ y la "retícula" de las *1-clases*.

Capítulo 4

La subcategoría A(sub h)

Se ha llegado a la parte final de este trabajo, sólo falta definir y describir a la subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ que aparece en la pregunta que se quiere contextualizar. Para esto, se estudia a continuación un tipo especial de familias de funciones.

4.1. E-fibraciones

Definición 4.1 *Sean, E una clase no vacía de espacios topológicos y $f \in \mathfrak{Top}(X, Y)$. Se dice que f es una E**-fibración** si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de cualquier E-espacio.*

Proposición 4.1 *Sea E cualquier clase no vacía de espacios topológicos y sea M_E la clase de las E-fibraciones suprayectivas. Entonces M_E es una 1-clase.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama conmutativo de funciones continuas

$$
\begin{tikzcd}
 & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
 & X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"] & & A \\
Z \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] & \\
 & Z \times I \arrow[ur, "H"'] & &
\end{tikzcd}
$$

donde $g_0 \in M_E$, $Z \in E$, $(f_i)_{i\in 2}$ es el producto fibrado de $(g_i)_{i\in 2}$ y para cada $z \in Z$, $h_0(z) = (z, 0)$.

Como $g_0 \in M_E$, existe $H' \in \mathfrak{Top}\,(Z \times I, A_0)$ tal que:

$$g_0 H' = g_1 H \quad \text{y} \quad H' h_0 = f_0 g$$

$$\begin{tikzcd}
 & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
Z \arrow[ur, "f_0 g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & A \\
 & Z \times I \arrow[uu, "H'"] \arrow[ur, "g_1 H"'] &
\end{tikzcd}$$

Puesto que $(f_i)_{i \in 2}$ es el producto fibrado $(g_i)_{i \in 2}$, existe una única $H'' \in \mathfrak{Top}\,(Z \times I, X)$ tal que:

$$f_0 H'' = H' \quad \text{y} \quad f_1 H'' = H$$

$$\begin{tikzcd}
 & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
Z \times I \arrow[urr, "H'"] \arrow[r, "H''"] \arrow[drr, "H"'] & X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"'] & & A \\
 & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Además, como

$$f_1 \left(H'' h_0\right) = \left(f_1 H''\right) h_0 = H h_0 = f_1 g \quad \text{y} \quad f_0 \left(H'' h_0\right) = \left(f_0 H''\right) h_0 = H' h_0 = f_0 g$$

y $(f_i)_{i \in 2}$ es monofuente, se tiene que

$$H'' h_0 = g$$

$$\begin{tikzcd}
 & & A_0 \arrow[dr, "g_0"] & \\
 & X \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"] & & A \\
Z \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & A_1 \arrow[ur, "g_1"'] & \\
 & Z \times I \arrow[uu, "H''"] \arrow[uuur, "H'"'] \arrow[ur, "H"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente, H'' es un levantamiento, de lo cual se sigue que $f_1 \in M_E$. Por lo tanto, M_E es una *1-clase.*$\blacklozenge$

Definición 4.2 *A la función f_1 se le llama E-**fibración inducida por** g_0 **a través de** g_1.*

Definición 4.3 *Dados, una clase no vacía de espacios topológicos E y la 1-clase M_E de E-fibraciones suprayectivas, se denota a $\underline{A}(M_E)$ por $\underline{A}_E$.*

Definición 4.4 *Cuando E consta de todos los espacios topológicos, las E-fibraciones reciben el nombre de **fibraciones de Hurewicz**; debido a esto, la subcategoría asociada a la clase de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz se denotará como $\underline{A}_{\mathcal{H}}$.*

Tan sólo falta describir a esta subcategoría y a sus correflexiones, para facilitar esto, se prueban a continuación algunos resultados.

4.2. Fibraciones de Hurewicz

En adelante, el empleo de las letras φ y ψ remite a las funciones dadas en la definición 1.25 de los preliminares.

Proposición 4.2 *Dada $p \in \mathfrak{Top}(E, B)$, son equivalentes:*

(i) p es fibración de Hurewicz

(ii) Dado el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[urr, "g"] \arrow[drr, "G"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"] & & B \\
 & & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

con p_0 y q_0 las evaluaciones en 0, entonces existe $F \in \mathfrak{Top}\,(Y, \mathfrak{M}\,(I,E))$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[urr, "g"] \arrow[r, "F"] \arrow[drr, "G"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"] & & B \\
 & & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

(iii) Sea

$$W = \{(e,\alpha) \in E \times \mathfrak{M}\,(I,B) : \alpha\,(0) = p\,(e)\}$$

Entonces existe $\Gamma \in \mathfrak{Top}\,(W, \mathfrak{M}\,(I,E))$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dr, "p"] & \\
W \arrow[urr, "\pi_1"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[drr, "\pi_2"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"] & & B \\
 & & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas restringidas a W.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $H = \psi\,(G)$; entonces H es una homotopía que comienza en pg y que se levanta en una homotopía $\widetilde{H}$ que comienza en g. Entonces, basta tomar $F = \varphi\left(\widetilde{H}\right)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es inmediato, pero vale la pena notar que $[\Gamma(e,\alpha)](0) = e$ y $[p\Gamma(e,\alpha)](t) = \alpha(t)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Supóngase que se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[urr, "g"] \arrow[drr, "G"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"] & & B \\
 & & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Defínase

$$\begin{array}{rccc} h: & Y & \to & W \\ & y & \mapsto & (g(y), G(y)) \end{array}$$

Entonces:

$$[\Pi p \Gamma h](y) = [\Pi p \Gamma](g(y), G(y)) = \pi_2(g(y), G(y)) = G(y)$$

y

$$[q_0 \Gamma h](y) = [q_0 \Gamma](g(y), G(y)) = \pi_1(g(y), G(y)) = g(y)$$

Por consiguiente se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[urr, "g"] \arrow[r, "\Gamma h"] \arrow[drr, "G"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"] & & B \\
 & & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supóngase que se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & B \\
 & Y \times I \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Tomando $G = \varphi(H)$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& & E \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[urr, "g"] \arrow[drr, "G"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"'] & & B \\
& & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, existe $F \in \mathfrak{Top}(Y, \mathfrak{M}(I,E))$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
& & E \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[urr, "g"] \arrow[r, "F"] \arrow[drr, "G"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"'] & & B \\
& & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Basta tomar $\widetilde{H} = \psi(F)$.

Lema 4.1 *Toda fibración suprayectiva de Hurewicz $p : E \to B$ que tiene por codominio a un espacio B que es contraíble, es una retracción y, consecuentemente, una identificación.*

Demostración. Si B es contraíble, se tiene una homotopía

$$H : B \times I \to B$$

tal que para toda $b \in B$,

$$H(b,0) = b_0 \quad \text{y} \quad H(b,1) = b$$

con $b_0 \in B$. Sea $e_0 \in p^{-1}\{b_0\}$ y sea $c : B \to E$ la función constante de valor e_0. Entonces conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dr, "p"] & \\
B \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "h_0"'] & & B \\
& B \times I \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Como p es fibración de Hurewicz, existe $\widetilde{H}: B \times I \to E$ continua tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dr, "p"] & \\
B \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "h_0"'] & & B \\
& B \times I \arrow[uu, "\widetilde{H}"'] \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora puede definirse una función $q : B \to E$ haciendo $q(b) = \widetilde{H}(b,1)$, para todo $b \in B$. Entonces

$$pq(b) = p\widetilde{H}(b,1) = H(b,1) = b$$

para todo $b \in B$, lo cual prueba que p es retracción.⧫

Lema 4.2 *Dada $p : E \to B$ una fibración suprayectiva de Hurewicz, si B es un espacio localmente conectable por trayectorias, entonces p es una identificación.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& & E \arrow[dr, "p"] & \\
W \arrow[urr, "\pi_1"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[drr, "\pi_2"'] & \mathfrak{M}(I,E) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"] & & B \\
& & \mathfrak{M}(I,B) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

donde (π_1, π_2) es el producto fibrado canónico de (p, p_0) y Γ es la función que existe por la proposición anterior. Se define

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathfrak{M}(I,E) & \to & W \\ & \alpha & \mapsto & (q_0(\alpha), \Pi p(\alpha)) \end{array}$$

que es continua puesto que cada componente es continua. Además:

$$(r\Gamma)(w) = r(\Gamma(w)) = (p_0(\Gamma(w)), \Pi p(\Gamma(w))) = (\pi_1(w), \pi_2(w)) = w$$

de aquí que $r\Gamma = 1_W$ y, consecuentemente, r es una retración y, por tanto, una identificación.

π_1, π_2 son proyecciones y, por tanto, identificaciones.

p_0 también es una identificación, pues es abierta, ya que por ser B localmente conectable por trayectorias, su topología tine una base de abiertos conectables por trayectorias. Si V es un elemento de dicha base, entonces, dado un abierto subbásico (K,V) de $\mathfrak{M}(I,B)$, se tiene que:

$$p_0(K,V)=V,\ \text{si } 0\in K \quad \text{o} \quad p_0(K,V)=U,\ \text{si } 0\notin K$$

donde U es la componente por trayectorias que contiene a V, que es abierta (porque B es localmente conectable por trayectorias), y K un subconjunto compacto de B.

Por consiguiente, dado que $p\pi_1 r=p_0\pi_2 r$, se tiene que p es una identificación.♦

Definición 4.5 *Dados, un espacio topológico $X\in\mathfrak{Top}$, $p_0:\mathfrak{M}(I,X)\to X$ la evaluación en 0 y $x\in X$, se denota por $P(X,x)$ al espacio de trayectorias de X cuyo origen es x, con la topología compacto abierta.*

Lema 4.3 *Dados, un espacio topológico X y $x\in X$, se tiene que $P(X,x)$ es contraíble y que*

$$\begin{array}{rccc} p_1: & P(X,x) & \to & X \\ & \alpha & \mapsto & \alpha(1) \end{array}$$

es una fibración de Hurewicz.

Demostración. (i) Sea

$$\begin{array}{rccc} H: & P(X,x)\times I & \to & P(X,x) \\ & (\alpha,t) & \mapsto & \beta \end{array}$$

donde $\beta(s)=\alpha(ts)$. Entonces, para toda $\alpha\in P(X,x)$,

$$[H(\alpha,0)](s)=x \quad \text{y} \quad [H(\alpha,1)](s)=\alpha(s)$$

Basta ver que H es continua para mostrar que $P(X,x)$ es contraíble.

Sea $(\alpha,t)\in P(X,x)\times I$ y sea (K,V) un elemento de la subbase de $P(X,x)$ tal que $H(\alpha,t)\in(K,V)$.

Sean $K_t=\{r\in I: r=tk, k\in K\}$ y J abierto en I tal que $K_t\subseteq J\subseteq\overline{J}\subseteq\alpha^{-1}(V)$ que existe por ser I normal.

Sea $\{J_\ell\}_L$ la colección de componentes conexas de J; entonces $\underset{\ell\in L}{\cup}J_\ell$ es una cubierta abierta de K_t, por lo que existe $M\subseteq L$ finito tal que $K_t\subseteq\underset{\ell\in M}{\cup}J_\ell$.

Sea

$$\varepsilon=\max\{|\sup(J_\ell\cap K)-\sup(J_\ell)|\,,|\inf(J_\ell\cap K)-\inf(J_\ell)|\}_M$$

Entonces $(\alpha,t)\in(K_t,V)\times\left(t-\frac{\varepsilon}{t},t+\frac{\varepsilon}{t}\right)$ y además $H\left((K_t,V)\times\left(t-\frac{\varepsilon}{t},t+\frac{\varepsilon}{t}\right)\right)\subseteq(K,V)$; por lo tanto, H es continua en (α,t).

(ii) Por la proposición anterior, basta mostrar que existe Γ continua tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dr, "p"] & \\
W \arrow[urr, "\pi_1"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[drr, "\pi_2"'] & \mathfrak{M}(I,P(X,x)) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod p"] & & P(X,x) \\
 & & \mathfrak{M}(I,X) \arrow[ur, "r_0"'] &
\end{tikzcd}$$

con (π_1,π_2) el producto fibrado canónico de (r_0,p_1). Defínase $\Gamma(\alpha,\beta)=\gamma$ con

$$\begin{array}{rccc}\gamma: & I & \to & P(X,x) \\ & t & \mapsto & \delta_t\end{array}$$

donde $\delta_t : I \to (X,\tau)$ está dada por

$$\delta_t(s)=\begin{cases} x & \text{si } 4s\leq t \\ \alpha\left(\frac{4s-t}{4-2t}\right) & \text{si } t\leq 4s\leq 4-t \\ \beta\left(\frac{4s+t-4}{2s-1}\right) & \text{si } 4-t\leq 4s\end{cases}$$

Nótese que

$$\begin{array}{rccc}\psi(\gamma): & I\times I & \to & X \\ & (t,s) & \mapsto & \delta_t(s)\end{array}$$

es continua puesto que es el pegado de tres funciones continuas sobre un dominio cerrado que coinciden en la intersección. Puesto que ψ es una biyección entre espacios de funciones continuas, γ es continua; consecuentemente, Γ está bien definida.

Además,

$$\begin{array}{rccc}\psi\psi(\Gamma): & W\times I^2 & \to & X \\ & ((\alpha,\beta),(t,s)) & \mapsto & \delta_t(s)\end{array}$$

es continua, pues dados $((\alpha_0,\beta_0),(t_0,s_0))\in W\times I^2$ y un abierto V de X tales que

$$[\psi\psi(\Gamma)]((\alpha_0,\beta_0),(t_0,s_0))\in V$$

existen $A,B\subseteq I$ intervalos abiertos tales que $(t_0,s_0)\in A\times B$ y $[\psi(\gamma_0)](A\times B)\subseteq V$.

Sea $K\subseteq A\times B$ un compacto tal que $(t_0,s_0)\in \overset{\circ}{K}$.

Sea $K_1=\left\{r\in I : r=\frac{4s-t}{4-2t},\ \text{con }\ (t,s)\in K \text{ y } t\leq 4s\leq 4-t\right\}$.

Sea $K_2=\left\{r\in I : r=\frac{4s+t-4}{2s-1},\ \text{con }\ (t,s)\in K \text{ y } 4-t\leq 4s\right\}$.

Entonces

$$((\alpha_0,\beta_0),(t_0,s_0))\in (K_1,V)\times(K_2,V)\times\overset{\circ}{K}$$

y

$$[\psi\psi(\Gamma)]\left((K_1, V) \times (K_2, V) \times \overset{\circ}{K}\right) \subseteq V$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rlcl} \psi(\Gamma): & W \times I & \rightarrow & P(X, x) \\ & ((\alpha, \beta), t) & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$$

es continua y, por consiguiente, Γ es continua.

Por construcción, $q_0\Gamma = \pi_1$ y $\Pi p_1\Gamma = \pi_2$. Por lo tanto p_1 es fibración de Hurewicz.♦

Lema 4.4 *Dados, un espacio topológico (X, τ), $\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de (X, τ) y*

$$\begin{array}{rlcl} 1: & \coprod\limits_{j\in J}\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right) & \rightarrow & (X, \tau) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

se tiene que 1 *es fibración de Hurewicz.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \coprod\limits_{j\in J}(X_j, \tau\mid_j) \arrow[dr, "1"] & \\
(W, \omega) \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & (X, \tau) \\
& (W, \omega) \times I \arrow[uu, "\widetilde{H}"'] \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{H}$ es la única función que hace conmutar al diagrama, es decir, $\widetilde{H}(w, t) = H(w, t)$. Nótese que $\left(g^{-1}(X_j)\right)_J$ es una partición de (W, ω) y que cada $g^{-1}(X_j) \in \omega$.

Entonces, $(W, \omega) \cong \coprod\limits_{j\in J} g^{-1}(X_j)$y por tanto, $(W, \omega) \times I \cong \coprod\limits_{j\in J} g^{-1}(X_j) \times I$.

Dado que $\bigcup\limits_{j\in J} \tau\mid_{X_j}$ es una base para la topología de $\coprod\limits_{j\in J}\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)$, y que si $U \in \tau\mid_{X_j}$ entonces existe $V \in \tau$ tal que $V \cap X_j = U$, se tiene:

$$\widetilde{H}^{-1}(U) = \widetilde{H}^{-1}(V \cap X_j) = \widetilde{H}^{-1}(V) \cap \widetilde{H}^{-1}(X_j) = H^{-1}(V) \cap \left(g^{-1}(X_j) \times I\right) \in \omega$$

Por tanto, $\widetilde{H}$ es continua.♦

Lema 4.5 *Dados, un espacio topológico X, $(X_j)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de X y*

$$\begin{array}{rlcl} p: & \coprod\limits_{j\in J} P(X_j, x_j) & \rightarrow & X \\ & \alpha & \mapsto & \alpha(1) \end{array}$$

se tiene que p es fibración suprayectiva de Hurewicz.

Demostración. Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & \coprod\limits_{k\in J} P(X_k, x_k) \arrow[dr, "\coprod p_j"] & \\
& W \times I \arrow[ur, "\coprod H_j"] \arrow[rr, "\widetilde{H}"] \arrow[dr, "H"'] & & \coprod\limits_{k\in J} X_k \arrow[dl, "1"] \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

Por los dos lemas anteriores, $\widetilde{H}$ es homotopía y cada p_j es fibración de Hurewicz que levanta a $\widetilde{H}\mid_{\widetilde{H}^{-1}(X_j)}$ en H_j.♦

4.3. Descripción de la subcategoría A(sub h)

Definición 4.6 *Sea $\mathcal{C}$ la clase de los espacios topológicos contraíbles.*

Observación 4.1 *$\mathcal{C}$ es una $\mathfrak{Top}$-clase.*

Teorema 4.1 $\underline{\widetilde{\mathcal{C}}} = \underline{A}_{\mathcal{H}}$

Demostración. ($\subseteq$) En vista del lema 4.1 se tiene que todo $\mathcal{C}$-espacio es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.

($\supseteq$) Dado un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio X, sea $(X_j)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de X.

Sea $\{x_j\}_J$ tal que, para cada $j \in J$, $x_j \in X_j$.

Sea $(p_j : P(X_j, x_j) \to X_j)_J$ la familia de evaluaciones en 1 de cada $P(X_j, x_j)$.

Entonces, la función $p : \coprod\limits_{j\in J} P(X_j, x_j) \to X$, con $p\mid_{P(X_j,x_j)} = p_j$, es una identificación, ya que es una fibración de Hurewicz y X es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.

Como cada $P(X_j, x_j)$ es contraíble, $X \in \underline{\widetilde{\mathcal{C}}}$.♦

Corolario 4.1 *Dado un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio X, sea $(X_j)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de X. Entonces, para cada $j \in J$, X_j es abierto y por consiguiente, $X \cong \coprod\limits_{j\in J} X_j$.*

Demostración. X_j es abierto ya que la función $p : \coprod\limits_{j\in J} P(X_j, x_j) \to X$, con $p\mid_{P(X_j,x_j)} = p_j$ es una identificación y $p^{-1}(X_j) = P(X_j, x_j)$.♦

Definición 4.7 *Dados, un espacio topológico X, $(X_j)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de X y*

$$\begin{array}{rll} p: & \coprod_{j\in J} P\left(X_j, x_j\right) & \rightarrow & X \\ & \alpha & \mapsto & \alpha\left(1\right) \end{array}$$

se define

$$C_{\mathcal{H}}X := \left(\coprod_{j\in J} P\left(X_j, x_j\right)\right) / \sim$$

donde $\alpha \sim \beta$ si, y sólo si, $p\left(\alpha\right) = p\left(\beta\right)$.

Lema 4.6 *Dados, un espacio topológico $X \in \mathfrak{Top}$, $(X_j)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de X y*

$$\begin{array}{rll} p: & \coprod_{j\in J} P\left(X_j, x_j\right) & \rightarrow & X \\ & \alpha & \mapsto & \alpha\left(1\right) \end{array}$$

entonces existe una función continua y biyectiva

$$c : C_{\mathcal{H}}\left(X\right) \rightarrow X$$

tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{j\in J} P(X_j, x_j) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dd, "q"] \\ X & \\ & \mathcal{C}_{\mathcal{H}}(X) \arrow[ul, "c"] \end{tikzcd}$$

siendo q la identificación natural.

Demostración. Puesto que p es constante en las fibras de q, defínase a c como

$$\begin{array}{rll} c: & C_{\mathcal{H}}\left(X\right) & \rightarrow & X \\ & y & \mapsto & p\left(q^{-1}\left(y\right)\right) \end{array}$$

Entonces c está bien definida, es tal que $cq = p$ y es continua porque q es final.⧫

Teorema 4.2 *Para todo espacio topológico X, la función $c : C_{\mathcal{H}}\left(X\right) \rightarrow X$ es una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión.*

Demostración. Sea $a : A \to X$ una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión. Entonces existe

$$\widetilde{p} : \coprod_{j \in J} P\left(X_j, x_j\right) \to A$$

que hace conmutativo al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j\in J} P(X_j, x_j) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & X \\
A \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

Por ser a inyectiva y p una fibración de Hurewicz, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod_{j\in J} P(X_j, x_j) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dd, "\widetilde{p}"] & & W \arrow[ll, "g"'] \arrow[dl, "h_0"] \\
X & & W \times I \arrow[ul, "\widetilde{H}"'] \arrow[dl, "H"] & \\
 & A \arrow[ul, "a"] & &
\end{tikzcd}$$

del cual es claro que $\widetilde{p}$ es una fibración de Hurewicz. Además, dado que $\widetilde{p}$ es suprayectiva y A es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio, se sigue que $\widetilde{p}$ es una identificación, en conformidad con la definición de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$. Observando el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod_{j\in J} P(X_j, x_j) \arrow[ddl, "q"'] \arrow[d, "\widetilde{p}"] \arrow[ddr, "p"] & \\
 & A \arrow[dr, "a"] & \\
\mathcal{C}_{\mathcal{H}}(X) \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "c"'] & & X
\end{tikzcd}$$

es claro que $\widetilde{p}$ y q son identificaciones correspondientes a la misma relación, a saber: $\alpha \sim \beta$ si, y sólo si, $p\left(\alpha\right) = p\left(\beta\right)$; consecuentemente existe un homeomorfismo $h : C_{\mathcal{H}}\left(X, \tau\right) \to A$

tal que $c = ah$.♦Recuérdese el resultado del lema 4.2 en el cual se establece que dada una fibración suprayectiva de Hurewicz $p : E \to B$, si B es un espacio localmente conectable por trayectorias, entonces p es una identificación. A consecuencia de esto y de los resultados precedentes se tiene el siguiente

Corolario 4.2 *Todo espacio localmente conectable por trayectorias es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.*♦

Observación 4.2 *No todo $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio es localmente conectable por trayectorias.*

En efecto, considérese al conjunto:

$$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \quad \text{y} \quad x \in \left(\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}_{\mathbb{N}} \cup \{0\} \right) \right\} \cup ([0, 1] \times \{0\})$$

con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$. Éste es el **espacio peine**; se sabe que es contraíble, que no es localmente conectable por trayectorias y, por el teorema4.1 es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.♦

4.3.1. A(sub h)-correflexiones y fibraciones de Hurewicz

De [1]: "Tiene sentido preguntarse si toda $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión es una fibración de Hurewicz. Creemos que no es así, pero no conocemos ningún ejemplo de una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión que no sea fibración de Hurewicz".

Del siguiente diagrama conmutativo, y del lema 4.4, es claro que H' es un levantamiento de H si, y sólo si, lo es de $\widetilde{H}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \coprod_{j \in J} X_j \arrow[d, "p"] \\
 & \mathcal{C}_{\mathcal{H}}(X) \arrow[ur, "c'"] \arrow[dr, "c"] & \\
W \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & X \\
 & W \times I \arrow[uu, "H'"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[uuur, bend right=60, "\widetilde{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Además, del diagrama conmutativo siguiente, resulta que $\widetilde{H}$ se levanta si, y sólo si, se levanta en cada uno de sus cofactores

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_{\mathcal{H}}(X) \arrow[dr, "c'"] & \\
W \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h_0"'] & & \coprod_{j\in J} X_j \\
 & W \times I \arrow[uu, "H'"] \arrow[ur, "\widetilde{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente, la pregunta se puede restringir al caso en que (X,τ) es conectable por trayectorias. Debido a esto, a partir de este momento se considerarán sólo espacios conectables por trayectorias.

Lema 4.7 *No todo espacio conectable por trayectorias es un* $\underline{A}_{\mathcal{H}}$*-espacio.*

Demostración. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} (0, 1-9t)\,, \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (3t-1, -2)\,, \text{ si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \left(1, 3\left[\sin 1 + 2\right]\left[t - \frac{2}{3}\right] - 2\right)\,, \text{ si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \\ \left(\frac{1}{t}, \sin t\right)\,, \text{ si } 1 \leq t \end{cases}$$

(i) El espacio $f([0,\infty)) \subseteq \mathbb{R}^2$, que se llama **circunferencia polaca**, es conectable por trayectorias.

(ii) $[0,\infty)$ es contraíble y, por el teorema 4.1 es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.

(iii) Siendo c la $\underline{A}_{\mathcal{H}}$- correflexión de $f([0,\infty))$, la función

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{f}: & [0,\infty) & \to & C_{\mathcal{H}}(f([0,\infty))) \\ & t & \mapsto & c^{-1}\{f(t)\} \end{array}$$

es el $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflejo de f y es continua y biyectiva.

(iv) Dada $\alpha \in \mathfrak{Top}(I, f([0,\infty)))$, se tiene que $\widetilde{\alpha} \in \mathfrak{Top}(I, [0,\infty))$, donde para toda $s \in I$, $\widetilde{\alpha}(s) = f^{-1}(\alpha(s))$. En efecto, si $x \in \mathbb{R}^+$, la restricción

$$\begin{array}{cccc} f^*: & [0,x) & \to & f([0,x)) \\ & t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

es un homeomorfismo. Además, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(I) \subseteq f([0,M))$, pues si no fuese así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $t_n \in I$ tal que $f(t_n) \notin f([0,n))$ y se podría formar una subsucesión convergente en I, $\left(t_{n_j}\right)_{J\subseteq\mathbb{N}}$. Si el límite de esta subsucesión es t, entonces $0 \leq f^{-1}(\alpha(t)) \leq \frac{2}{9}$; además, para cada $\varepsilon > 0$ existiría $\delta > 0$ tal que $\alpha(B_\delta(t)) \subseteq B_\varepsilon(\alpha(t))$, de lo cual se seguiría que $B_\varepsilon(\alpha(t)) \cap f([0,\infty))$ es conectable por trayectorias, lo que en general es falso.

(v) Obsérvese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C}_{\mathcal{H}}[0,\infty) \arrow[dd, "c"] & \\
{[0,\infty)} \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & P(f[0,\infty), f(0)) \arrow[ul, "q"'] \arrow[dl, "p"] \\
& f[0,\infty) &
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{f}^{-1}$ es continua, puesto que dada $[\alpha] \in C_{\mathcal{H}}(f([0,\infty)))$, si $\alpha(1) = f(t)$, se tiene que $\widetilde{f}^{-1}([\alpha]) = f^{-1}(c[\alpha]) = f^{-1}(\alpha(1)) = f^{-1}(f(t)) = t$ y se distinguen dos casos:

(a) Si $\frac{2}{9} < t$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$U = \{[\beta] \in C_{\mathcal{H}}(f([0,\infty))) : \beta(1) \in B_\delta(f(t))\}$$

se tiene que $\widetilde{f}^{-1}(U) \subseteq B_\varepsilon(t)$, donde U es abierto porque $q^{-1}(U) = (\{1\}, B_\delta(f(t)) \cap f([0,\infty)))$ es un abierto subbásico en $P(f([0,\infty)), f(0))$.

(b) Si $0 \leq t \leq \frac{2}{9}$, entonces para cada $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{9}\right)$ se tiene que $\widetilde{f}(B_\varepsilon(t))$ es abierto en $C_{\mathcal{H}}(f([0,\infty)))$, pues dado $\gamma \in q^{-1}\left(\widetilde{f}(B_\varepsilon(t))\right)$, si $\gamma(I) \subseteq f([0,a))$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$U = \left\{\beta \in P(f([0,\infty)), f(0)) : \beta(1) \in B_\delta(f(t)) \quad \text{y} \quad \beta(I) \subseteq f([0,a))\right\}$$

se tiene que $\gamma \in U \subseteq q^{-1}\left(\widetilde{f}(B_\varepsilon(t))\right)$, donde U es abierto porque

$$U = (\{1\}, B_\delta(f(t))) \cap (I, V(f[0,a)))$$

es un abierto básico en $P(f([0,\infty)), f(0))$ si $V(f[0,a)) = (\mathbb{R}^2 - \{f(a)\}) \cap f([0,\infty))$.

(vi) Por lo tanto, $[0,\infty) \overset{\widetilde{f}}{\cong} C_{\mathcal{H}}(f([0,\infty)))$. Se sabe que la circunferencia polaca no es contraíble y, en consecuencia, no es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio, puesto que de serlo sería homeomorfo a su $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflector, que es contraíble, y es ésta es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos.♦

Corolario 4.3 $\mathfrak{Top}(I, f([0,\infty))) \cong \mathfrak{Top}(I, [0,\infty))$.

Demostración. Se sigue del inciso (iv) anterior y de la biyectividad de f.♦

Para determinar si una correflexión tiene la propiedad del levantamiento de homotopías resultará útil el siguiente resultado, recordando la equivalencia establecida en la proposición 4.2.

Proposición 4.3 *Para un espacio topológico X considérense, su $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión $c : C_{\mathcal{H}}(X) \to X$ y el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}_{\mathcal{H}}X \arrow[dr, "c"] & \\
W \arrow[urr, "\pi_1"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[drr, "\pi_2"'] & \mathfrak{M}(I,\mathcal{C}_{\mathcal{H}}X) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod c"] & & X \\
 & & \mathfrak{M}(I,X) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

con W el producto fibrado correspondiente; entonces $\Gamma : W \to \mathfrak{M}(I, C_{\mathcal{H}}(X))$ existe si, y solamente si, $\Pi c : \mathfrak{M}(I, C_{\mathcal{H}}(X)) \to \mathfrak{M}(I, X)$ es biyectiva.

Demostración. Por la biyectividad de c se tienen, la biyectividad de π_2 y la inyectividad de Πc. En efecto:

1. Para toda $\alpha \in \mathfrak{M}(I, X)$ se tiene que $\pi_2\left(\pi_1^{-1} c^{-1}\{p_0(\alpha)\}\right) = \alpha$
2. Si $\pi_2(x, \alpha) = \pi_2(y, \beta)$, entonces:
$$p_0\pi_2(x, \alpha) = p_0\pi_2(y, \beta)$$
de lo cual se sigue que:
$$c\pi_1(x, \alpha) = c\pi_1(y, \beta)$$
se tiene entonces:
$$c(x) = c(y)$$
por lo tanto:
$$x = y$$
3. Si $\Pi c(\alpha) = \Pi c(\beta)$, entonces:
$$c\alpha = c\beta$$
y por tanto:
$$\alpha = \beta$$

Además, si $\Pi c\Gamma = \pi_2$, de la suprayectividad de π_2 se sigue la suprayectividad de Πc. Por otro lado, si Πc es suprayectiva, basta definir

$$\begin{array}{rccl}\Gamma : & W & \to & \mathfrak{M}(I, C_{\mathcal{H}}(X)) \\ & w & \mapsto & (\Pi c)^{-1}(\pi_2(w))\end{array}$$

♦

Observación 4.3 *La $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión de la circunferencia polaca es una fibración de Hurewicz.*

Demostración. Por la proposición 4.2, basta probar que existe Γ continua que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & {[0,\infty)} \arrow[dr, "f"] & \\
W \arrow[urr, "\pi_1"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[drr, "\pi_2"'] & \mathfrak{M}(I,[0,\infty)) \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dr, "\prod f"] & & f[0,\infty) \\
 & & \mathfrak{M}(I,f[0,\infty)) \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Por el corolario 4.3, Πf es biyectiva. Por la proposición anterior, Γ existe y es única. Se verá que también es continua.

Sea (K,V) un abierto subbásico de $\mathfrak{M}\left(I,[0,\infty)\right)$ y sea $(t,\alpha)\in\Gamma^{-1}\left(K,V\right)$. Dada $a\in\mathbb{R}^{+}$ tal que $\alpha\left(I\right)\subseteq[0,a)$ se tiene que si

$$U=\left\{(t,\beta)\in W:\beta\left(K\right)\subseteq V' \quad \text{y} \quad t\in[0,a) \quad \text{y} \quad \beta\left(I\right)\subseteq f\left([0,a)\right)\right\}$$

donde V' es un abierto de $\mathbb{R}^2$tal que $f\left(\alpha\left(I\right)\right)\subseteq V'\cap f\left([0,a)\right)$.

Entonces U es abierto en W porque es intersección de abiertos subbásicos, $(t,\alpha)\in U$ y $\Gamma\left(U\right)\subseteq(K,V)$.♦

Proposición 4.4 $\Pi c:\mathfrak{M}\left(I,C_{\mathcal{H}}\left(X\right)\right)\to\mathfrak{M}\left(I,X\right)$ *es biyectiva.*

Demostración. Considérese el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & P(X,x) \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\
I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & {} & \mathcal{C}_{\mathcal{H}}(X) \arrow[dl, "c"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Dada $\alpha\in\mathfrak{M}\left(I,X\right)$, basta probar que existe $\alpha'\in\mathfrak{Top}\left(I,P\left(X,x\right)\right)$ tal que $p\alpha'=\alpha$, puesto que haciendo $\widetilde{\alpha}:=q\alpha'$ resulta

$$c\widetilde{\alpha}=c\left(q\alpha'\right)=\left(cq\right)\alpha'=p\alpha'=\alpha$$

Para exhibir a α' basta tomar $x = \alpha(0)$ y definir $\alpha'(t) := \beta$, donde $\beta(s) = \alpha(st)$. La continuidad de α' es consecuencia de la continuidad de la homotopía definida en (i) del lema 4.3.♦

Corolario 4.4 Γ *es biyectiva, es única y en caso de ser continua, es un homeomorfismo.*

Demostración. La biyectividad de Γ es consecuencia de la biyectividad de Πc y de π_2. De esto se infiere su unicidad. De aquí y de que W sea el producto fibrado resulta que sea Γ un homeomorfismo.♦

Se abre a continuación un paréntesis para presentar a una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ que ayudará a la descripción de los $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflectores.

4.3.2. Espacios localmente conectables por trayectorias

Proposición 4.5 *Si* (X, τ) *es un espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X, τ) *es localmente conectable por trayectorias.*
(b) *Las componentes por trayectorias de cualquier abierto* A *de* X *son abiertas.*
(c) τ *posee una base cuyos elementos son conectables por trayectorias.*

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sean $A \in \tau$ y $a \in A$. Sea $c_A(a)$ la componente conexa por trayectorias de a en $(A, \tau|_A)$.

Dado $x \in c_A(a)$, existe N conectable por trayectorias tal que $x \in intN$ y $N \subseteq A$; entonces:

$$x \in N \subseteq c_A(x) = c_A(a)$$

Por tanto $c_A(a)$ es abierto.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea

$$\beta_X = \{B \subseteq X : \text{existen } A \in \tau \text{ y } a \in A \text{ tales que } B = c_A(a)\}$$

el conjunto de componentes por trayectorias de abiertos de (X, τ). Por (b) $\beta_X \subseteq \tau$; además se sabe que todo abierto A de X se ve partido en las componentes por trayectorias $c_A(a)$, $a \in A$. Esto implica que β_X es una base de τ cuyos miembros son conectables por trayectorias.
$(c) \Rightarrow (a)$: Sea β una base para τ de conjuntos conectables por trayectorias. Entonces, para cualesquiera $A \in \tau$ y $x \in A$ existe $B \in \beta$ tal que

$$a \in B \subseteq A$$

Por lo tanto (X, τ) es un espacio localmente conectable por trayectorias.♦

Lema 4.8 *Dados* $f \in \mathfrak{Top}(X, Y)$, $y \in f(X)$ *y* $c(y)$ *la componente conexa por trayectorias de* y *en* Y *entonces* $f^{-1}(c(y))$ *es unión de componentes por trayectorias de* X.

Demostración. Sean $y \in f(X)$, $c(y)$ la componente conexa por trayectorias de y en Y y

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subseteq X : \text{existe } x \in f^{-1}(c(y)) \text{ tal que } C = c(x) \right\}$$

donde $c(x)$ es la componente conexa por trayectorias de x.

Como f es continua, entonces $f(c(x))$ es conectable por trayectorias, por tanto para toda $x \in f^{-1}(c(y))$

$$f(c(x)) \subseteq c(y)$$

de lo cual se sigue que $f(\cup\mathcal{C}) \subseteq c(y)$ y por tanto, $\cup\mathcal{C} \subseteq f^{-1}(c(y))$.

Por construcción, $f^{-1}(c(y)) \subseteq \cup\mathcal{C}$. Por lo tanto, $f^{-1}(c(y)) = \cup\mathcal{C}$.♦

Teorema 4.3 *La clase de los espacios localmente conectables por trayectorias es la clase de objetos de una subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$.

Demostración.
Es claro que la clase de los espacios localmente conectables por trayectorias es una $\mathfrak{Top}$-clase. Se verá que es cerrada bajo coproductos y bajo identificaciones.

Sean, I una clase y, para toda $i \in I$, X_i un espacio localmente conectable por trayectorias. Dados $x \in \coprod_{i\in I} X_i$ y U abierto en $\coprod_{i\in I} X_i$ tal que $x \in U$, entonces existe $j \in I$ tal que $x \in (U \cap X_j)$ abierto en X_j; por lo tanto existe V abierto en X_j conectable por trayectorias tal que $x \in V \subseteq (U \cap X_j)$. Puesto que V es abierto en $\coprod_{i\in I} X_i$, se tiene que $\coprod_{i\in I} X_i$ es un espacio localmente conectable por trayectorias.

Por otro lado, dados, un espacio localmente conectable por trayectorias X y $q : X \to Y$ una identificación, se tiene que Y es un espacio localmente conectable por trayectorias. En efecto, dados, U abierto de Y, $y \in U$ y $c(y)$ la componente por trayectorias de y en U, se tiene que $q^{-1}(c(y))$ es unión de componentes conectables por trayectorias de $q^{-1}(U)$, que es abierta; de aquí que sea abierta $c(y)$.♦

Definición 4.8 *La subcategoría bicorreflexiva cuya clase de objetos consta de los espacios localmente conectables por trayectorias se denotará por* $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$.

4.3.3. Acotamiento de la topología del A(sub h)

Observación 4.4 $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}} \subsetneq \underline{A}_{\mathcal{H}}$

Demostración. La contención es inmediata del corolario 4.2. Para ver que la contención es propia, basta considerar al subespacio de $\mathbb{R}^2$ conocido como *escoba de bruja* cuyo conjunto subyacente es:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = t\left(1, \frac{1}{n}\right), t \in I, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup (I \times \{0\})$$

Este espacio es contraíble pero no es localmente conectable por trayectorias.♦

Observación 4.5 *Dado* $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}$*, si* (X, τ') *es su* $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$*-correflector y* (X, τ'') *es su* $\underline{A}_{\mathcal{H}}$*-correflector, se tiene que* $\tau \subseteq \tau'' \subseteq \tau'$*.*

Demostración. Puesto que $(X, \tau') \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$, se tiene que $1 : (X, \tau') \to (X, \tau'')$ es continua porque es el correflejo de $1 : (X, \tau) \to (X, \tau')$.♦

Apéndice A

FUNDAMENTOS

A lo largo del texto aparecen algunas operaciones entre clases, propiedades de clases y propiedades de funciones entre clases que corresponden a operaciones entre conjuntos, propiedades de conjuntos y propiedades de funciones entre conjuntos, las cuales se indican escribiendo entre comillas los nombres que tienen su símiles referidos a conjuntos, a fin de distinguirlas.

Esto se ha hecho dado que su analogía permite una traducción casi imperceptible entre ellas.

Se da a continuación una descripción de los fundamentos formales que sustentan los resultados que aparecen en el texto:

Antes que cualquier otra cosa, es importante aclarar que ante la disyuntiva de considerar como conceptos primitivos el de *colección* y el de *categoría*, se ha optado por el de colección (es decir, se deja de lado la fundamentación de MacLane).

Para el lector que no quiera profundizar demasiado, pueden resultar suficientes las siguientes consideraciones:

La noción que el lector tenga de conjunto coincide, casi con seguridad, con la que se utiliza en este texto. Lo mismo ocurre con la noción de pertenencia y la definición de contención.

Las clases son colecciones de conjuntos.

Una clase propia es una colección de conjuntos que no es un conjunto.

Los conglomerados son colecciones de clases.

Lo anterior resulta muy vago. Para ser más preciso se invita a tomar en consideración lo siguiente:

El estudio de las categorías concretas de conjuntos estructurados no se puede llevar a cabo dentro de la axiomática de ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice) por el simple motivo de que los objetos de las categorías en cuestión son conjuntos, y la colección de todos los conjuntos no es un conjunto.

Si bien este problema se resuelve con la axiomática de BGC (Bernays-Gödel-Choice), surgirá más adelante la necesidad de considerar colecciones de clases que bien pudieran resultar ser propias (basta revisar la definición de la 1-clase generada por una 0-clase) y algunas operaciones que se definen extendiendo las operaciones entre conjuntos a operaciones entre colecciones de clases.

Para resolver este problema bastaría una teoría en la cual se puedan llevar a cabo operaciones de colecciones de clases y que dichas opraciones resulten nuevamente en una clase. Desde luego que además de lo anterior, debe ofrecer una traducción inmediata si se trabaja en los "niveles inferiores" de clases propias y conjuntos.

Tal vez sea suficiente hacer notar que dicha teoría existe y que su consistencia es semejante en solidez a la de ZFC. Para quien quiera mayores detalles, se sugiere la lectura directa de dos excelentes textos:

"Categorical and Foundations of Category Theory" de Solomon Feferman, disponible en
http://math.stanford.edu/˜feferman/papers/Cat_founds.pdf

"Proof, Sets and Logic" de M. Randall Holmes, disponible en
math.boisestate.edu/˜holmes/indstudy/proofsetslogic.pdf

El primero construye una teoría (mínima) en la cual se puede cimentar la *teoría de las estructuras matemáticas*, el segundo desarrolla la axiomática NFU (New Foundations with Urelements) como base para una teoría de los conjuntos.

Bibliografía

[1] G.B. Salicrup y R. Vázquez, *Fibraciones y Correflexiones* Anales del Instituto de Matemáticas, vol.10 (1970)

[2] L. Montoya Gallardo, *Fibraciones y Correflexiones* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, 2000

[3] Graciela B. Slicrup, *Introducción a la Topología*, Aportaciones Matemáticas, textos 1, SMM(1993)

[4] Roberto Vázquez, *Reflexividad y Correflexividad*, Foro Red-Mat, vol.6 núm.5, `http://www.red-mat.unam.mx`

[5] Horst Herrlich, *Limit-operators and topological coreflections*, Trans. Amer. Math. Soc. vol146, 1969.